Derivaattafunktio, sinin ja kosinin derivaatat, monotonisuus ja ääriarvot lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Anton Uotila
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2021

Sisältö

Johdanto

Matematiikkaa on kaikkialla. Niin kasvien lehdet, ihmiskeho kuin auton moottoritkin noudattavat matemaattisia lainalaisuuksia. Eri koulutusasteilla opiskelijoiden suusta kuulee silti joskus kysymyksen: ”Tarvitsenko matematiikkaa mihinkään?” Tällainen ajatusmaailma tuo hyvin ilmi matematiikkaan ja sen opettamiseen liittyvän haasteen: Miten matematiikan opiskelusta saadaan mielekästä ja motivoivaa? Miten saada opiskelijat ymmärtämään matemaattisten asioiden merkitys ilman, että siitä tulee vain teknistä suorittamista? Edellä esitettyihin ajatuksiin lähdetään etsimään joitakin ratkaisuja tämän työn avulla.

Tämä Pro gradu -tutkielma on osa Avoin oppikirja -hanketta, jonka tarkoituksena on luoda ilmaisia opetusmateriaaleja lukio-opetukseen uusinta opintosuunnitelmaa noudattaen. Tutkielmani käsittelee kurssia *Derivaatta*, ja se sisältää kirjasta osiot ”Derivaatta funktiona, sinin ja kosinin derivaatat”, ”Summan derivaatta, monotonisuus” sekä ”Sovelluksia trigonometristen funktioiden derivaattaan, ääriarvot”.

1 Oppikirjan tavoitteet

1.1 Yleiset tavoitteet

Matemaattisten tietojen ja taitojen oppiminen on vahvasti yhteydessä pedagogisiin taitoihin, siihen kuinka opettaja opettaa opetettavan asian [6]. Verhoef, Tall, Coender ja van Smaalen tekivät tutkimuksessaan [29] työtä hahmottaakseen matematiikan opettamiseen ja oppimiseen liittyviä haasteita. Tutkimuksessa havaittiin, että opettajilla on tapana opettaa pitkään samalla totutulla tavalla, yleensä siten, miten heitä itseään on opetettu. Tämä havainto on jatkuvasti muuttuvan opetussuunnitelman ja nuorten tarpeitten kannalta huolestuttavaa, sillä opettajan tulisi olla valmis mukautumaan opiskelijoiden tarpeisiin ja uudistuvaan opetussuunnitelmaan. Tutkimuksessa havaittiin lisäksi useiden opettajien opetusmetodien olevan sellaisia, että ne lähinnä valmistavat opiskelijaa pääsemään tenteistä läpi, sen sijaan että rakennettaisiin opiskelijan oppimista ymmärtäminen edellä. [29]

Tämä tutkielma pyrkii puolestaan edistämään toisenlaista ajatusmaailmaa. Tehtävät perustuvat muun muassa Boudin ja Feletin [5] kuvailemaan ajatusmalliin ongelmalähtöisestä oppimisesta (engl. *problem-based learning, PBL*), jossa matemaattisten asioiden ymmärtäminen opiskelijalle suunnattujen pohdintatehtävien ja tarkkaan valittujen kysymysten avulla on etulinjassa. Samalla pyritään muokkaamaan opettajien asenteita siten, että he olisivat valmiita muuttamaan opetustyylejään ja seuraamaan tarkkaan opetussuunnitelman raameja (opetussuunnitelman tavoitteisiin palataan kappaleessa 1.2). Tämän kaiken tavoitteena on kehittää opettajan ja opiskelijan myönteistä asennetta matematiikkaa ja sen opiskelua kohtaan.

Miksi asenteella ja sen kehittymisellä on merkitystä? Opiskelija tarvitsee myönteisen perusasenteen ollakseen valmis korkeakouluun [30]. Tähän liittyy olennaisesti yksi tärkeimmistä lukion-opetuksen tehtävistä: Lukio-opetuksen tulee antaa opiskeluvalmiudet korkeakouluopiskeluun (Lukiolaki 2018/714) [17]. Lukion vastuu onkin suuri, jotta tämän lain pykälät saadaan täytettyä.

Miten lukiolaisia saadaan motivoitua ja valmistettua kohti korkeakouluja? Aiemmin mainittu tutkimus [29] esitti tähän kysymykseen joitakin ajatuksia. Ensinnäkin siinä havaittiin opiskelijoita tarkkailemalla, kuinka suuri on kysymysten esittämisen tärkeys. Siten saadaan opiskelijoita aktivoitua ja käynnistettyä heidän oma ajatusprosessinsa aiheesta. Samalla käsiteltävä aihe jää paremmin mieleen. Toiseksi, opetusjärjestyksellä on väliä. Kun edetään havainnollistavasta esitystavasta kohti yleistä määritelmää, rakentuu opiskelijalle mielikuva asiasta ensin, minkä jälkeen esitettävä kenties vaikeampikin matemaattinen kaava saattaa tuntua mielekkäämmin lähestyttävältä. Kolmanneksi havaittiin, että perinteisen oppikirjan orjallisen seuraamisen sijasta on tärkeää kiinnittää huomiota opiskelijan ajatusprosesseihin. [29]

Edellä esitettyjen huomioiden valossa tämän tutkielman kirjaosuus sisältää ensiksikin paljon havainnollistavia ja pohdintaa aikaansaavia kysymyksiä, kuten tehtävissä A.7, B.1, B.5, 9 jne. Toiseksi uudet opittavat asiat pyritään aina ensin tarkastelemaan havainnollisesti, ennen kuin edetään täsmälliseen lauseeseen tai määritelmään: A.2 + A.5; B.2 + B.3; C.2 + C.3 jne. Kolmanneksi jokaisessa tehtävässä opiskelijan ajatusprosessiin kiinnitetään huomiota sen sijaan, että tehtävät olisivat pelkkää teknistä suorittamista. Tehtävissä hyödynnetyt ajatusmallit tukeutuvat oman ideoinnin lisäksi vahvasti tutkimustyöhön, jota on tehty matematiikan oppimisen parissa.

1.2 Lukion opetussuunnitelma 2019

Uusista lukion opetussuunnitelman perusteista [19] päätettiin loppuvuodesta 2019, ja ne astuvat voimaan 1.8.2021 alkaen. Yksi merkittävistä uudistuksista on eri kurssien väliset painotukset: Osa uusista pitkän matematiikan kursseista on laajuudeltaan 3 opintopistettä ja osa vain 2. Lisäksi monia opiskeltavia sisältöjä siirrettiin kurssien välillä toisten opintokokonaisuuksien alle, ja samalla eri aihepiireihin käytettävät opiskeluajat kokivat lieviä muutoksia. Tätä tutkielmaa koskevan kurssin MAA6 Derivaatta (3 op) opetussuunnitelmassa asetetuista tavoitteista ne, jotka koskevat erityisesti kirjan tätä osaa ovat seuraavat:

Opiskelija...

- ...tutustuu ilmiöiden matemaattisten mallien käyttäytymiseen derivaatan avulla.
- ...ymmärtää derivaatan tulkinnan funktion muutosnopeutena.
- ...kykenee määrittämään yksinkertaisten funktioiden derivaatat.
- ...osaa käyttää ohjelmistoja raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa sovellusten yhteydessä.

Lisäksi matematiikan lukio-opetukseen on asetettu yleisiä tavoitteita, joista tähän kirjan osaan soveltuvat seuraavat tavoitteet:

Matematiikan opetuksen yleisenä tavoitteena on, että opiskelija...

- ...saa myönteisiä oppimiskokemuksia, tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa.

- ...kykenee seuraamaan matemaattista esitystä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, perustelemaan väitteitä ja arvioimaan eri muodoissa tarjottua informaatiota.

- ...rohkaistuu myös kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan sekä ongelmien ratkaisujen keksimiseen ja selkeään esittämiseen.

- ...osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, ohjelmistoja ja tietolähteitä sekä ymmärtää, ettei ohjelmiston tuottama tulos yksinään riitä osoittamaan, todistamaan tai perustelemaan väitettä.

Kirjaosassa jokaista edellä esitettyä tavoitetta pyritään edistämään muun muassa pohdintatehtävien, esimerkkien ja opettajan oppaaseen lisättyjen asiaa valottavien selitysten avulla. Siihen, kuinka ohjelmistoja käytetään oppimisen apuna, palataan tarkemmin perusteluosassa luvussa 2.

Matematiikan tutkimus edistyy vuosi vuodelta samalla kun maailma ja opiskelumaailma kokevat muutoksia. Sen vuoksi opintosuunnitelmat uudistuvat jatkuvasti. Opsin tavoitteena ja samalla haasteena onkin asettaa oppimiselle olosuhteet, joissa kognitiivinen kasvaminen on mahdollista ja jotka johtavat mielekkääseen ja matemaattisesti merkitykselliseen ajattelun kehittymiseen [25]. Opettajien tehtävänä puolestaan on noudattaa ajantasaista opetussuunnitelmaa, mihin tämä tutkielma osaltaan pyrkii antamaan avaimia.

1.3 Habits of mind

Aiemmissa kappaleissa esitettyjen tavoitteiden lisäksi kirjaa työstävän ryhmän kanssa sovittiin yhteisistä tavoitteista, joiden pohjalta lähdimme työstämään kirjaa. Valintamme perustuivat artikkeliin: *Habits of mind: An organizing Principle for Mathematics Curricula* [8], joka esittelee joukon ajatusmalleja, joita opiskelijoiden tulisi hyödyntää heidän oppimisprosesseissaan. Artikkelissa vedotaan akateemisen koulutuksen käyneitä opettajia auttamaan opiskelijoitaan kehittämään taitojaan *säännönmukaisuuksien etsijöinä*, *kokeilijoina*, *kuvailijoina*, *nikkareina*, *keksijöinä*, *visualisoijina*, *otaksujina* ja *arvaajina*. Näistä ryhmämme kanssa yhdessä sovitut tälle työlle asetetut ”Habits of mind” -tavoitteet olivat:

- Kokeileminen

Kokeilemisessa on kyse siitä, että matemaattisen haasteen eteen tullessa opiskelija pyrkii etsimään ratkaisua testaamalla eri vaihtoehtoja. Tavoitteena ei kuitenkaan ole, että jokainen vaihtoehto tulisi kokeilla läpi, vaan että kokeilun lomassa haasteen matemaattinen luonne vähitellen selkeytyy, ja siten päästään nopeammin ratkaisuun. Lisäksi etsittäessä esimerkiksi jotakin tiettyä kuvaukseen sopivaa parametria, saadaan kokeilemisen avulla samalla vastauksia myös siihen, mitä seuraa, jos parametri saa joitakin muita arvoja.

Tässä työssä muun muassa useasti kokeillaan GeoGebralla, miten graafin kuvaaja muuttuu, kun muuttujan arvoa muutetaan. Kokeilemisella pyritään myös saamaan onnistumisen tunteita onnistuneen kokeilun päätteeksi opiskelijalle, kuitenkaan sitä unohtamatta, että kokeilemisen lisäksi pätevään matemaattiseen perusteluun tarvitaan myös muita keinoja.

Viittauksia kirjaosan materiaaleihin, joissa hyödynnetään kyseistä Habits of mind -tavoitetta: B.2, B.5, C.6.

- Kuvaileminen

Kyky kuvailla asioita on tärkeä taito, jota pyritään kehittämään jokaisella koulutusasteella. Artikkelissa [8] on lueteltu neljä kuvailemisen muotoa, joita opiskelijan kannattaisi hyödyntää opinnoissaan. Ensiksi on mainittu matemaattisen prosessin vaiheiden kuvailu, mihin sisältyy muun muassa laskutehtävien tai todistusten vaiheiden sanallinen kuvaaminen. Toisena mainitaan ilmiöiden kuvaileminen matemaattisella kielellä, kolmantena kuvailun taidot matemaattista väittelyä käytäessä ja neljäntenä omien ajatusten kuvaileminen kirjoitusmuodossa. [8]

Lähes jokaiseen pohdintatehtävään on pyritty sisällyttämään kysymyksiä, joissa kehotetaan pohtimaan opeteltavaa asiaa sekä sanallisesti että kirjallisesti kuvailun keinoin, minkä lisäksi muun muassa matemaattisen todistuksen sanallista kuvausta pohditaan yhdistelytehtävän muodossa tehtävässä A.6.

Viittauksia kirjaosan materiaaleihin, joissa hyödynnetään kyseistä Habits of mind -tavoitetta: A.1, A.2, A.6, 5, B.2, B.5, 9, C.6, C.8, 13.

- Visualisoiminen

Matematiikan oppimisessa sanonta ”Yksi kuva kertoo enemmän kuin tuhat sanaa” pitää totisesti paikkansa. Visualisoiminen onkin yksi tärkeimmistä oppimisen keinoista lähes jokaisella matematiikan aihealueella, derivaatta mukaan lukien.

Visualisaation luomiseksi on käytetty erityisesti GeoGebra -sovellusta, jonka käyttömahdollisuuksista ja monimuotoisuudesta kerrotaan tarkemmin luvussa 2. Kuvien lisäksi kirjaosassa on runsaasti linkkejä GeoGebra-tiedostoihin, joiden avulla opiskelija pystyy interaktiivisesti muuttamaan muun muassa muuttujien arvoja ja tutkimaan matemaattisia ongelmia.

Viittauksia kirjaosan materiaaleihin, joissa hyödynnetään kyseistä Habits of mind -tavoitetta: A.1, A.2, A.6, A.7, 1, B.2, B.4, B.5, B.8, 6, 8, C.1, C.2, C.6, C.7, C.8, 11, 12, 13.

1.4 Tehtävätyypit

Derivaatta -kurssin materiaalia tekevän ryhmän kanssa sovittiin lisäksi tehtävätyypeistä, joita hyödynnetään materiaalin pohdinnoissa ja tehtävissä. Valinnat perustuivat M. Swanin artikkeliin *Collaborative Learning in Mathematics* [24]. Valitsimme artikkelista seuraavanlaisia tehtävätyyppejä:

- Eri esitystapojen yhdistäminen/vertailu (tehtävätyyppi 2)

Matemaattisia malleja voidaan esittää useilla eri tavoilla: sanallisesti, diagrammeilla, symboleilla, graafeilla ja monella muulla tavoin. Useat esitystavat aktivoivat opiskelijan ajatusmaailmaa ja tehostavat oppimista ja sen syvyyttä.

Tätä tehtävätyyppiä on hyödynnetty muun muassa seuraavissa tehtävissä: A.6, B.4, B.8, 6, 8, C.2.

- Matemaattisten väitteiden analysoiminen (tehtävätyyppi 3)

Yksi tehokas oppimisen keino on pohtia jonkin väitteen paikkansapitävyyttä. Onko jokin väite kenties aina, joskus vai ei koskaan totta? Opettajan tehtävänä on pienillä vihjeillä edistää ajatusprosessia ja vaikkapa vastaesimerkkien avulla kannustaa opiskelijaa pohtimaan kysymyksiä syvällisemmin.

Tätä tehtävätyyppiä on hyödynnetty muun muassa seuraavissa tehtävissä: 1, 10, 12.

- Päättelyn ja ratkaisujen analysointi (tehtävätyyppi 5)

Virheistä oppii, myös toisten virheistä. Onkin hedelmällistä tutkia matemaattisen haasteen eteen tullessa muiden opiskelijoiden ratkaisumetodeita ja mahdollisen väärän lopputuloksen tullessa pohtia, missä kohtaa mentiin sivupoluille. Toisaalta oikea ratkaisukin voidaan usein esittää monella eri tavalla, ja usean ratkaisuvaihtoehdon analysoiminen on opiskelijalle varmasti silmiä avaavaa.

Tätä tehtävätyyppiä on hyödynnetty muun muassa seuraavissa tehtävissä: 2, 9.

2 Perusteluosa

2.1 Tunti 1: Derivaatta funktiona: sinin ja kosinin derivaatat

Yhteiskunta tulee koko ajan enemmän ja enemmän riippuvaiseksi teknologiasta, mikä luo opetukseen useita uusia ulottuvuuksia. Uudet työkalut oikein ja tehokkaasti käytettynä voivat havainnollistaa tutkittavia matemaattisia asioita aivan uusista näkökulmista.

Alankomaissa tehtiin eri kouluissa toimivien opettajien yhteistyötutkimus [28], jossa tutkittiin toisen asteen koulutukseen osallistuvien ymmärrystä derivaatan käsitteestä. Tärkeänä työkaluna opettajat käyttivät GeoGebraa, joka on hyvin matematiikan opettamiseen ja oppimiseen soveltuva ilmaiseksi saatavilla oleva sovellus, jota voi hyödyntää muun muassa geometristen ja algebrallisten tehtävien havainnollistamisessa [13]. Tutkimuksessa opettajat valmistivat tuntejaan tietyn kaavan mukaan suunnitellen opetukseen GeoGebra-tehtäviä. Tulosten saamiseksi opiskelijoiden reaktioita, kuten vierustovereiden kanssa käytyjä keskusteluja ja hämmennyksen hetkiä, tarkkailtiin, minkä lisäksi opettajien omaa kehittymistä projektin aikana analysoitiin haastattelujen ja ryhmätapaamisten avulla. Tutkimuksessa kävi ilmi opiskelijoiden aktiivisen roolin tärkeys sen sijaan, että opettaja olisi koko ajan vain äänessä. Lisäksi tehtiin huomioita käsitteellisen ymmärryksen merkityksestä pelkkien kaavojen käyttämisen sijaan. Kysymysten roolia tuotiin esille siltä kannalta, että jokaisella kysymyksellä tulisi olla jokin tarkoitus, joka kehittää ajatusketjuja eteenpäin. [28]

Tutkimuksen [28] huomiot heijastuvat tässä tutkielmassa opiskelijoita aktivoivina tehtävinä, kuten A.2 ja A.7, joissa opiskelijan rooli on avainasemassa opettajan dominoivan aseman sijaan. Käsitteellistä ymmärrystä pyritään kehittämään siten, että kaavojen taustalle muodostetaan ensin havainnollisuutta, jotta opiskelija ymmärtää, mistä asiasta on käytännön ja käsitteen tasolla kysymys (esim. tehtävä A.7).

Tehtävä A.1 lähtee liikkeelle siitä, mihin edellisessä kirjan osassa on jääty. Mistä derivaatassa ja raja-arvossa on oikeastaan kysymys? Derivaatan ymmärtämisen ytimessä on ajatus siitä, että kun zoomaa kuvaajaa äärettömän lähelle kohti tutkittavaa pistettä, funktion (oletus: kyseisessä pisteessä derivoituva) kuvaaja näyttää suoralta viivalta [29]. Edellisessä kappaleessa esitellyssä tutkimuksessa [28] havaittiin opiskelijoiden keskuudessa syvällisen ymmärtämisen hetkiä, kun opettaja vertasi derivaattaa maapallon pintaan. Tämän ajatuksen pohjalle perustuu tehtävä A.1, jossa maapallon pinta edustaa funktion käyrää ja pitkä taipumaton lauta sen pisteittäistä derivaattaa.

Funktion käsitteen on useasti havaittu aiheuttavan monille opiskelijoille vaikeuksia [3] [20]. Tämän vuoksi termin "funktio" mainitseminen ei yksistään auta pääsemään eroon pisteittäisen derivaatan mielikuvasta. Monelle matematiikolle siirtyminen pisteittäisestä derivaatasta derivaattafunktioon saattaa toki tuntua itsestään selvältä, mutta D. Tallin [25] mukaan se ei ole uutena käsitteenä läheskään yhtä helppoa tiedostaa ja oppia, kuin miltä se näyttää. Myös muut tutkimukset ovat osoittaneet kyseisen haasteen opiskelijoiden keskuudessa. Esimerkiksi Oehrtman, Carlson, ja Thompson [18] havaitsivat opiskelijoitten keskuudessa selviä ymmärryksen puutteita derivaattafunktion käsitteeseen siirryttäessä, samoin kuin Asiala, Cottrill, Dubinsky ja Schwingendorf tutkimuksessaan [3]. Jälkimmäisessä artikkelissa todettiin, että osa opiskelijoista ajatteli pisteittäisen derivaatan arvoa jonkinlaisena vakiona, eikä siten ymmärrystä derivaatasta funktiona päässyt syntymään. Toiset puolestaan luulivat jonkin funktion pisteen tangentin kuvaajan nähdessään, että kyseinen kuvaaja oli funktion derivaattafunktio. Näiden huomioiden seurauksena Asiala ym. [3] ehdottavatkin opiskelijoille yhtenä opetuksellisena keinona ilmaistavan seuraavan sanallisen ilmaisun: ”Derivaattafunktio on funktio, jossa x kuvautuu (tangentin) kulmakertoimeksi pisteessä $(x, f(x))$”.

Myös Ubuz [27] tutki yleisiä väärinkäsityksiä derivaattaan liittyen, ja niiden havaittiin olevan seuraavia: a) Derivaatta tietyssä pisteessä on derivaattafunktio, b) tangentin yhtälö on derivaattafunktio, c) derivaatta tietyssä pisteessä on tangentin yhtälö, ja d) derivaatta pisteessä on tangenttiyhtälön arvo kyseisessä pisteessä.

Edellisissä kappaleissa esitettyihin haasteisiin on lähdetty vastaamaan tehtävien A.1 ja A.2 avulla. Ensin mainitussa tehtävässä pisteittäisen derivaatan käsitettä laajennetaan vähitellen kohti funktiota ilman että funktion käsitettä vielä korostetaan. Tehtävässä A.2 lähestytään derivaatan funktiomuotoa jo täsmällisemmin, kun useista $\sin(x)$ -funktion kuvaajan eri kohtiin muodostetuista tangentin kulmakertoimista opiskelija piirtää murtoviivakuvion, jota verrataan $\cos(x)$ -käyrään (joka on opiskelijan tietämättä funktion $\sin(x)$ derivaatta). Asialan ym. [3] mukainen opiskelijoita selkeyttävä ilmaisutapa on mainittu opettajanoppaassa D. Näillä kaikilla toimilla pyritään välttämään se yleisesti ilmenevä ongelma, että käsitys derivaatasta jää ainoastaan tasolle ”derivaatta käyrän tangenttina”, minkä takaata paistaa väärinkäsitys siitä, että derivaatassa on kyse vain yksittäisen pisteen tutkimisesta [20].

Toimiva tapa havainnollistaa derivaattaa funktiona on tilanteen animointi siten, että tangentti muuttuu koko ajan [21]. Useassa tehtävässä, kuten A.2, B.2 ja B.5, käytetään GeoGebran liukusäädin-toimintoa kulmakertoimen animoinnin mahdollistavana tutkimisvälineenä, mikä edesauttaa eroon pääsyä pisteittäisestä ajattelutavasta. Samalla kehittyy ajatus derivaatan riippuvuudesta tarkasteltavan kohdan x:n arvoon [21]. GeoGebran valmiin tangentinpiirto -työkalun käyttö vastaa myös Asialan [3] ja Leinhardthin [16] raportoimaan haasteeseen: Opiskelijoilla on vaikeuksia piirtää tangentteja funktioon ilman apuvälineitä. Kun tätä haastetta ei ole, voidaan kaikki keskittyminen keskittää tutkittavaan asiaan ilman teknisiä ongelmia.

David Tall esittelee artikkelissaan [26] kolme matemaattisen ymmärtämisen maailmaa: ruumillistetty (embodied), symbolinen (symbolic) ja muodollinen (formal) maailma. Ruumillistettuun maailmaan kuuluu käsitteiden omaksuminen konkreettisen havaitsemisen ja aistitun todellisen maailman keinoin, mikä sitä kautta muuttuu ymmärrykseksi. Symbolinen maailma kasvaa ulos ruumiillistuneesta maailmasta toiminnan avulla, ja tätä maailmaa symboloidaan ajateltavina käsitteinä. Muodollinen maailma perustuu muodollisiin määritelmiin ja todisteisiin. Hieman vastaavaa ajatusmaailmaa matemaattisen ymmärryksen kehittämiseksi esittelee Asiala ym. [2] APOS-teorian avulla, jossa oppiminen perustuu toimintaan (action), prosesseihin (processes), objekteihin (objects) ja malleihin (schema).

Tehtävässä A.2 pyritään hyödyntämään toimintaa ja konkreettista havaitsemista yhtenä oppimisen työkaluna. Tall esittää käytännön esimerkkejä teoriansa tueksi artikkelinsa [26] sivulla 6, joita on hyödynnetty tämän tutkielman kirjaosassa varsin suoraviivaisesti. Hän ensiksi ehdottaa $\sin(x)$ -graafin muotoon tutustuttaessa sen kuvaajan läpikäymistä sormella seuraten, jotta muodostuu fyysinen perustuntuma graafin jatkuvasti muuttuvasta kulmakertoimesta. Seuraavana vaiheena artikkeli tuo esille matemaattisen ymmärtämisen maailman ruumiillisen toiminnan merkityksen: Kun graafin muotoa seuraa suoralla kämmenellä siten, että sormet osoittavat eteenpäin, saa konkreettisen mielikuvan siitä, milloin kulmakerroin (=derivaatta) on positiivinen (sormet osoittavat ylöspäin), milloin negatiivinen (sormet alaspäin) ja milloin nolla (käsi suorassa). APOS-teoriassa [2] tämä vaihe kuuluu toimintaan ja prosesseihin, joiden avulla käsitteen (tällä kertaa derivaattafunktio) ymmärrys syvenee ja valmistaa mieltä kohti formaalia mallia.

Päästäessä määritelmään A.3, tavoitteena on, että derivaattafunktio käsitteenä on jo alkanut muodostumaan tutuksi. Vuorossa onkin sen formaali määritelmä, mikä ei enää sisällä vakiota ”a”, vaan kiinnitetyn a:n, joka voi saada kaikkia muuttujan x arvoja [23]. Jotta edellisissä kappaleissa mainituista väärinkäsityksistä päästäisiin lopullisesti eroon, on määritelmän perään lisätty Parkin artikkelin [21] innoittamana huomautus A.4, mikä tähdentää pisteittäisen derivaatan $f'(a)$ ja derivaattafunktion $f'(x)$ merkintöjen eroa. Parkin teoksessa ehdotetaan, että merkintöjen eroa selitetään huolellisesti ja että on tärkeää olla tarkka, kumpaa merkintää kulloinkin käyttää. Tätä mukaillen kyseistä eroa onkin selitetty huomautuksessa A.4, jossa on vielä korostaen muistutettu kiinnittämään huomiota siihen, puhuuko kulloinkin pisteittäisestä derivaatasta vai derivaattafunktiosta.

Todistusten esittämisen ja opettelemisen tärkeys on kiistelty asia opettajien ja opiskelijoitten keskuudessa. Useat opiskelijat kokevat matemaattisten todistusten olevan turhia [11], mikä on suuri haaste motivoitumisen kannalta. Guler esittää artikkelissaan *The Difficulties Experienced in Teaching Proof to Prospective Mathematics Teachers* [11] kuitenkin monia todistusten esittämisen hyötyjä opiskelijoille. Gulerin mukaan todistusten omaksuminen parantaa ongelmanratkaisutaitoja, kehittää matemaattista ajattelua, mahdollistaa matemaattisen kommunikoinnin, aikaansaa luovuutta ja kehittää perustelutaitoja. Gulerin tutkimuksessa selvisi, että yliopisto-opiskelijoilla on hankaluuksia tietää, kuinka aloittaa todistuksen tekeminen ja kuinka yleistää matemaattisia tosiasioita. Havaittiin myös vaikeuksia siinä, mitä kaavaa tulisi kussakin tilanteessa käyttää ja kun lopulta kaavat löydetään, niiden syvää merkitystä ei ymmärretä. [11]

Edellä mainittuja yliopisto-opiskelijoiden kokemia hankaluuksia kokevat varmasti myös lukion pitkän matematiikan opiskelijat. Vaikka suomalaisissa oppikirjoissa on enemmän mahdollisuuksia oppia todistustekniikkaa kuin esimerkiksi ruotsalaisissa oppikirjoissa [4], niin tässä työssä on haluttu tarttua edellisessä kappaleessa mainitun tutkimuksen esiin tuomiin haasteisiin sisällyttämällä todistustehtävä (A.6) yhdeksi osaksi materiaalia. Tehtävä pienentää kynnystä todistusten tulkitsemiseen, sillä siinä on annettu todistuksen runko valmiiksi. Täten havaittuun todistuksen aloittamisen vaikeuteen on vastattu. Todistuksessa pyritään myös tukemaan sopivan kaavan valintaa antamalla muutama vaihtoehto, joista valita tilanteeseen sopiva kaava, minkä lisäksi kuvien avulla kehitetään ymmärrystä kaavojen merkitystä kohtaan. Myöskin Gulerin esittämään haasteeseen matemaattisten mallien yleistämisestä on vastattu omalla osiolla "matemaattinen yleispätevä kaava".

Todistustehtävä A.6 on myös opettajille ystävällinen, sillä todistusten rakenteet ja niiden opettaminen opiskelijoille ei ole opettajillekaan helppoa, kuten ilmenee K. Lesseigin raportoimasta tutkimuksesta [15], joka käsittelee opettajien taitoja ja toimintamalleja liittyen todistuksiin ja niiden esittämiseen opetustyössä. Tehtävä siis samalla pyrkii kehittämään opettajien ammattitaitoa todistustekniikan suhteen, mikä on asetettu yhdeksi tärkeäksi tavoitteksi Lesseigin artikkelissa. Siinä myös ehdotetaan, että todistusta tuettaisiin visuaalisten esitystapojen avulla, minkä vuoksi muutaman haastavan yleispätevän matemaattisen kaavan kohdalla tehtävässä A.6 on esitetty tilannetta havainnollistava kuva. Samalla yleispätevien kaavojen avulla saadaan luotua tärkeitä linkkejä empiiristen havaintojen ja validien todistusten välille [15]. Tämän tehtävän yhtenä tärkeänä tavoitteena onkin lisätä opettajien rohkeutta todistusten esittämiseen ja analysointiin oppimistilanteissa. Sitä kautta sekä opiskelijalle että opettajalle tulee varmuus siitä, että kaavoja ei vain saada tyhjästä, vaan nilllä on vahva matemaattinen perusta.

2.2 Tunti 1: Harjoitustehtävät

Tehtävä 1 jatkaa pohdinnan A.7 käsittelyä ja tehtävä 4 pohdinnan A.1 käsittelyä, joihin liittyvät perustelut on esitetty osiossa 2.1. Tehtävässä 3 sovelletaan kappaleessa opittuja asioita ja harjoitellaan GeoGebran käyttöä. Haastetehtävä 5 soveltaa pohdinnassa A.6 opittuja tekniikoita. Valittuja Habits of mind -periaatteita hyödynnetään tehtävissä 1 (*visualisoiminen*) ja 5 (*kuvaileminen*). Tehtävätyypeistä edustettuna ovat *matemaattisten väitteiden analysoiminen* (1) ja *päättelyn ja ratkaisujen analysointi* (2).

2.3 Tunti 2: Summan derivaatta, monotonisuus

Opetettavan asian rajaaminen on tärkeää opiskelijan oppimisprosessissa. Matematiikassa, niin kuin monissa muissakin aineissa yksi aihe liittyy toiseen, joka liittyy taas kolmanteen jne., mikä aiheuttaa riskin, että yksinkertainenkin asia laajenee suureksi ja vaikeasti ymmärrettäväksi hajanaiseksi kokonaisuudeksi. Kun opiskelija joutuu tietotulvan keskelle, alkuperäinen opeteltava asia saattaa jäädä hämärän peittoon, kun on niin monta asiaa, joihin tulisi keskittyä. C. Adams kiinnittääkin huomiota artikkelissaan yksinkertaisten tehtävien hyötyihin [1]. Hän toteaa oppilaitoksissa esiteltävien matemaattisten ongelmien ilmenevän kokeneille opettajalle usein helposti ymmärrettävinä, mutta opiskelijalle taas jokainen askel kohti lopputulosta saattaa olla ponnistuksen takana. Sen vuoksi, jos jokin tekninen tai kokonaisuuden kannalta ylimääräinen asia sisältyy käsiteltävään tehtävään, voi se johtaa opiskelijaa harhaan. Tämän vuoksi monissa tunnin 2 (ja myös muissa) osioissa teknisiä ja harhaanjohtavia sivujuonteita on pyritty välttämään muun muassa antamalla opiskelijalle osittain valmiiksi ohjelmoituja GeoGebrapohjia (B.2, B.5) ja lisäämällä selittäviä tekstejä ja muistutuksia aiemmin opituista asioista mallitehtävien lomaan (B.4). Tällöin opiskelijan ei tarvitse käyttää aivokapasiteettiaan tuolle hetkelle epäolennaisten asioiden päättelemiseen, eikä keskittyminen hajaannu, jolloin voimat on mahdollista kohdistaa suoraan tutkittavaan asiaan.

Mallitehtävä B.4 pohjautuu lisäksi T. Dreyfusin ja T. Eisenbergin artikkelin *On different facets of mathematical thinking* [10] esittämiin ajatuksiin siitä, kuinka matemaattisen asian esittäminen eri muodoissa on tärkeää. Teos antaa ideoita siitä, kuinka sama asia voidaan ilmaista muun muassa sekä graafisesti että algebrallisesti, ja mitä hyötyä useasta esitystavasta voi olla. Artikkelissa sanotaan esimerkiksi painokkaasti, että ”funktio on käsitteenä abstrakti, eikä sen vuoksi ole kannattavaa puhua tietystä funktiosta (algebrallisesti) ilman jonkinlaista toista mallinnuskeinoa, kuten graafista esitystapaa.” Mitä useampia esitystapoja on opiskelijalle samanaikaisesti tarjolla, sitä tehokkaammin hänellä on edellytykset löytää aiheeseen liittyviä matemaattisia yhteyksiä muihin tilanteisiin ja ajatusmaailmasta tulee siten rikkaampaa. [10] Useiden esitystapojen hyvänä puolena on myös se, että jokaisella opiskelijalla on omat vahvuusalueensa, miten hahmottaa matemaattisia malleja. Joku saattaa ymmärtää matemaattisia malleja parhaiten kaavojen avulla, jollakin sen sijaan on kyky ymmärtää niitä tehokkaimmin kuvien ja kuvioiden avulla. Mallitehtävässä B.4 funktion derivaatta määritetään sekä laskemalla että graafisesti, mikä tarjoaa mahdollisuuden ratkaisutapojen vertailuun sekä oman mahdollisen vahvuusalueen hyödyntämiseen.

Aiemmin käsitellyssä artikkelissa [28] suositeltiin derivaatan opiskelussa kehittämään ymmärrystä visuaalisen hahmotuksen kautta kohti algebrallista ja laskennallista perustelua. Tämän vuoksi mallitehtävässä B.4 käydään ratkaisumalli läpi ensin visuaalisesti ja sitten algebrallisesti hahmotettuna. Vaikka visuaalinen hahmotustapa on osittain kertausta edellisistä kirjan kappaleista, linkittää tämä tehtävä hyvin eri ratkaisumallit toisiinsa.

Palataan vielä hetkeksi takaisin GeoGebra-sovelluksen tärkeyteen ja hyötyihin, jotka osaltaan perustelevat tämän oppitunnin (B.2, B.4, B.5) ja myös koko työn osalta runsasta GeoGebran käyttöä. L. Dikovic esittelee artikkelissaan *Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level* [9] GeoGebran käyttötapoja ja hyötyjä matematiikan opetuksessa. Lisäksi artikkelissa kerrotaan tutkimuksesta, jonka avulla tutkittiin GeoGebran vaikutuksia oppimistuloksiin. Toistotestien ja muiden tutkimusmenetelmien avulla saatiin selviä tuloksia siitä, että GeoGebran käytöstä on hyötyä opiskelijoille sekä ymmärryksen että tiedon kohenemisen tasolla. Artikkeli vertasi GeoGebraa laskinsovelluksiin, ja totesi sen olevan laskinsovelluksia käyttäjäystävällisempi ja helppokäyttöisempi, minkä lisäksi plussaa olivat sovelluksen monikielisyys sekä tarjolla olevien komentojen selkeys. GeoGebran havaittiin myös olevan hyvä tapa siirtyä opettajan luennoivasta tyylistä kohti jo aiemmin esiteltyä ongelmalähtöistä oppimista [5], missä opiskelijan aktiivinen tutkiva rooli korostuu. [9]

Kaikki kommentit GeoGebrasta eivät artikkelissa [9] olleet kuitenkaan pelkästään positiivisia. Opiskelijoita, joilla ei vielä ollut paljoa kokemusta koodauksesta, todettiin olevan vaikeuksia tietää, miten alkaa sovelluksella ratkaisemaan käsiteltävää tehtävää tai matemaattista ongelmaa. Tämän vuoksi mallitehtävässä B.4 on annettu kädestä pitäen ohjeet, kuinka pyydetyt toimet tehdään GeoGebran avulla. Tämä pienentää opiskelijoiden kynnystä ottaa sovellus käyttöön ja kyseisen mallitehtävän ohjeita on mahdollista hyödyntää lisäksi muissa tehtävissä ja pohdinnoissa. On kuitenkin tärkeää muistaa tasapaino matematiikkaa havainnollistavien sovellusten käytössä. J. Parkin jo useasti aiemmin viitatussa artikkelissa *Is the derivative a function? If so, how do we teach it?*[21] muistutetaan, että GeoGebran yhtenä riskinä on liika luottaminen graafiseen esitykseen, jos sovellusta käytetään ainoana hahmottamisen keinona. Graafiset esitykset Parkin mukaan menettävät tehonsa ja arvonsa, jos niitä ei saada yhdistettyä teoriaan.

Perustellaan vielä hieman mallitehtävän B.4 tehtävänantoa, joka on muotoiltu seuraavasti:

> Määritä funktion $f(x) = (2 + 2x^3)(4 - 2x)$ derivaatta kohdissa $x = 0$ ja $x = 1,1$ eli $f'(0)$ ja $f'(1,1)$.

Tehtävänannossa on selitetty ja muistuteltu mieleen merkintöjen $f'(0)$ ja $f'(1,1)$ merkitys, sillä tutkimukset osoittavat opiskelijoilla olevan vaikeuksia ymmärtää vastaavankaltaisia merkintätapoja. Esimerkiksi Asiala, Cottrill, Dubinsky ja Schwingendorf [3] raportoivat useista erilaisista tulkinnoista, kuinka opiskelijat olivat ymmärtäneet merkinnän $f(5)$. Heidän tutkimuksessaan on kirjoitettu auki opiskelijoiden keskusteluja aiheeseen liittyen, joista selviää, että jotkut kutsuivat merkintää harhaanjohtavasti ”vitosen funktioksi”. Toiset taas osasivat sijoittaa luvun 5 x:n tilalle, mutta toimenpide jäi vain teknisen suorituksen tasolle ilman ymmärrystä siitä, miksi näin tehdään. Tämän taustalla saattaa olla tutkimuksen monesta kohtaa ilmennyt yleinen haaste siitä, että opiskelijan on vaikeaa ymmärtää, onko milloinkin kyse funktiosta, sen pisteittäisestä tangentista vai derivaattafunktiosta. [3]

Mallitehtävässä B.4 samoin kuin lukuisissa muissa kirjan tehtävissä onkin pyritty käyttämään selkeitä merkintätapoja ja useita eri ilmaisumuotoja, jotta opiskelijan on helppoa pysyä perillä käsiteltävästä asiasta. Samalla saadaan luotua linkkejä saman asian eri ajatusmallien välille, mihin edellisessä kappaleessa mainittu artikkeli [3] lämpimästi kannustaa.

J. Brunerin kirjassa *Toward a theory of instruction* [7] esitellään kolme oppimisen ja kasvamisen tasoa.

1. Tekeminen, kokeminen (enactive level)
2. Koetun asian ymmärtäminen, johdonmukaisuuksien löytäminen (iconic level)
3. Tekstintäminen, tekstin ymmärtäminen (symbolic level)

Useaa arkista tai opiskeluun liittyvää asiaa on hankalaa kuvailla pelkillä sanoilla. Tekeminen (1) lisää konkreettisuutta opiskeltavaan aiheeseen. Samalla opiskelija löytää johdonmukaisuuksia ja alkaa ymmärtämään asiaa (2), kunnes lopulta osaa ilmaista oppimaansa sanallisesti (3). Tehtävässä B.5 hyödynnetään jokaista Brunerin oppimisen ja kasvamisen tasoa. Kasvavuutta ilmiönä aluksi hahmotellaan GeoGebra-tiedoston avulla tekemisen kautta, kunnes löydetään visuaalisia keinoja hyväksi käyttäen johdonmukaisuuksia, joita pyritään lopuksi muotoilemaan sanoiksi. Välittömästi pohdinnan B.5 jälkeen esitetään formaali määritelmä B.6, mikä täydentää oppimisen tasolla 3 koettuja oppimiskokemuksia.

Perusteluosiossa on jo aiemmin sivuttu useiden erilaisten esitystapojen merkitystä oppimiselle. Tällä linjalla on myös M. Kendal, joka väitöskirjassaan toteaa useilla esitystavoilla olevan tärkeä osa juuri derivaatan käsitteen ymmärtämisessä [14]. Tehtävässä B.8 opiskelijalle annetaan tehtäväksi soveltaa oppimiaan tietoja tehtävässä, jossa yhdistellään visuaalista esitystapaa tietoon funktion monotonisuudesta. Opiskelijalle näkyviin visualisointeihin on kirjoitettu ainoastaan osan funktioiden yhtälöt. Tämä valinta on tehty kahdesta syystä. Ensiksikin siksi, että lukion pitkässä matematiikassa ei ole vielä tähän mennessä käsitelty paloittain määriteltyjen funktioiden yhtälön muodostamista [19]. Toiseksi valinnan taustalla on opiskelijoilla havaittu väärinkäsitys siitä, että jokaisessa tilanteessa olisi aina tarpeen yrittää muodostaa graafisesti kuvatulle funktiolle yhtälö [3]. Joskus pelkän kuvaajan tarkastelulla voidaan tehdä tarvittavat johtopäätökset tutkittavasta asiasta.

2.4 Tunti 2: Harjoitustehtävät

Tehtävässä 6 sovelletaan mallitehtävän B.4 oppisisältöjä ja tehtävässä 10 hyödynnetään laajasti kappaleen B pohdintoja ja esimerkkejä, jotka on perusteltu osiossa 2.3. Valittuja Habits of mind -periaatteita hyödynnetään tehtävissä 6, 8 (*visualisoiminen*) ja 9 (*kuvaileminen*). Tehtävätyypeistä edustettuna ovat *eri esitystapojen yhdistäminen/vertailu* (6, 8), *matemaattisten väitteiden analysoiminen* (10) ja *päättelyn ja ratkaisujen analysointi* (9).

2.5 Tunti 3: Sovelluksia trigonometristen funktioiden derivaattaan, ääriarvot

Tunti 3 käsittelee sovelluksia trigonometristen funktioiden derivaattaan ja luo katsauksen myös ääriarvoihin.

Trigonometristen funktioiden ymmärtäminen on monille opiskelijoille haastavaa. Tätä ilmiötä on havaittavissa jopa siirryttäessä toisen asteen koulutuksesta yliopisto-opintoihin, kuten ilmenee S. Siyepun artikkelista *Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions* [22]. Artikkelissa löydettiin runsaasti trigonometrisiin funktioihin liittyvien matemaattisten todistusten esittämisen vaikeuksia erään Etelä-Afrikan tekniikan alan yliopiston ensimmäisen vuoden opiskelijoilta. Ongelmien takaa paistoi kokonaisvaltaisen ymmärryksen puute siitä, mihin trigonometriset funktiot ja niiden derivaatat todella perustuivat. Artikkeli ehdottaakin, että kyseisen aihepiirin ymmärrystä pyrittäisiin kohentamaan jo toisen asteen koulutuksessa, jotta yliopisto-opettajat eivät joutuisi käyttämään syventävän tiedon omaksumiseen tarkoitettua aikaa perusasioiden ymmärryksen luomiseen. [22]

Yksi tärkeä keino trigonometristen funktioiden derivaatan opiskelussa on vääristä käsityksistä eroon opettaminen [22]. Tähän on tartuttu kolmannen tunnin materiaalissa erityisesti tehtävässä C.6, mutta lisäksi tehtävissä C.2 ja C.8. Tehtävä C.6 pureutuu ymmärryksen luomisen ytimeen. Tehtävässä lähdetään hahmottelemaan tarkasteltavan, opiskelijalle vieraan, trigonometrisen funktion $f(x) = \sin(ax)$ ominaisuuksia kysymysten avulla tekemällä vertailutyötä funktion ja sen derivaatan välillä. Funktion lauseke sisältää parametrin a, jota muuttamalla pyritään tilanteesta luomaan derivaatan määritelmään perustuva yleiskuva. Kysymykset johdattelevat kohti viimeistä osiota, jossa opiskelijan tarkoituksena on määritelmiä ja visuaalisia havaintoja hyväksi käyttäen muodostaa funktion derivaatan lauseke. Tässä pohdinnassa opiskelija pääsee soveltamaan aiemmin oppimaansa tietoa ja kehittämään päättelytaitoja. Lisäksi on mahdollisuus päästä eroon yleisestä inhimillisestä väärinkäsityksestä, jonka mukaan funktion $f(x) = \sin(ax)$ derivaatta on $f'(x) = \cos(ax)$. Tarkemmin sisäfunktion ja yhdistetyn funktion käsitteitä tarkastellaan seuraavissa kirjan osissa.

Tehtävässä C.2 rakennetaan vaiheittain ymmärrystä $\cos(x)$ -funktion kasvavuuden ja vähenevyyden yhteydestä funktion derivaattaan. Tehtävässä C.8 sen sijaan sovelletaan kappaleen aiempia pohdintoja ja syvennetään siten ymmärrystä trigonometristen funktioiden derivaattaan, kuten Siyepu artikkelissaan [22] kannusti.

Jokaisessa pohdinnassa tässä ja edellisissä kappaleissa on pyritty mahdollisimman selkeään esitystapaan. Tämä on tärkeää useista syistä. Esimerkiksi jo aiemmin viitatussa teoksessa Dreyfus ja Eisenberg puhuvat visuaalisesti päättelevistä opiskelijoista, joille graafiset esitykset, esityksen selkeytys ja ydinasioiden korostaminen graafisin keinoin ovat tärkeitä oppimisen työkaluja [10]. Eräs graafisen korostamisen keinoista on värien käyttäminen. Yksi tehtävistä, joissa olen käyttänyt värejä selkeyttämisen vuoksi on pohdinta C.6. Kyseisessä tehtävässä on koodattu GeoGebra-tiedostoon jokainen tutkittava funktio eri väreillä. Näitä samoja värejä käytetään viitatessa pohdinnan teksteissä käsiteltäviin funktioihin. Tämän ansiosta kysymysten yhteyksiä graafisen esityksen kuvaajiin on helpompi seurata. Lisäksi merkinnät $f(x)$ ja $f'(x)$ eivät sekoitu helposti keskenään, mikä edesauttaa kyseisen kaltaisissa merkinnöissä tutkimuksissa havaittujen sekaannuksien välttämistä opiskelijoiden keskuudessa [3] (katso myös 2.3).

Graafisten korostuskeinojen ja esitysmuotojen käyttäminen edistää myöskin symmetrian ymmärtämistä [10], mikä on erittäin tärkeää puhuttaessa ja käsiteltäessä trigonometrisia funktiota, joiden kuvaajat varsin usein sisältävät runsaasti symmetriaa. Tästä syystä tässä työssä trigonometriset funktiot esitetään lähes aina myös graafisesti, kuten tehtävissä A.2 A.6 A.7 C.2, C.6 ja C.8.

Aiemmin opitun summaaminen yhteen on havaittu olevan yksi tehokas oppimisen osa-alue [28]. Kirjan osiot B ja C alkavatkin edellisen oppitunnin kertaamisella. Pohdinta B.1 on edellisen oppimiskerran yhteennitova osio, jossa on esitetty tiivistäviä ja hieman soveltavia kysymyksiä aiemmin opittuun liittyen. Pohdinta C.1 sen sijaan hyödyntää toisenlaista kertaamisen metodia: käsitekarttaa. Pohdintaan on kerätty edellisen kappaleen tärkeimpiä käsiteltyjä termejä, joiden välille on vedetty numeroituja viivoja. Tärkeimpänä tavoitteena pohdinnassa on herättää keskustelua ymmärryksen luomiseksi, jotta käsitteet eivät jää irrallisiksi toisistaan, vaan niistä muodostuu yhtenäinen kokonaisuus. Idea käsitekartan käytöstä tuli H. Gurin ja B. Barakin artikkelista *The Erroneous Derivative Examples of Eleventh Grade Students*, jossa painotettiin merkityksellisten ja ymmärrystä luovien opetusmetodeitten, kuten käsitekarttojen, käyttämisen tärkeyttä opetuksessa [12].

Edellä mainitussa Gurin ja Barakin artikkelissa [12] tutkittiin yleisiä derivaattaan liittyviä virheitä, joita opiskelijat tekevät. Tavoitteena oli saada opettajille tietoa, minkä perusteella heidän olisi mahdollista kehittää omaa opetustaan, opetusmetodeitaan ja opetuksen sisältöä. Havaittiin, että opiskelijat opettelivat ulkoa lähinnä derivointikaavat sekä laskusäännöt, mutta eivät muistaneet eivätkä ymmärtäneet derivaatan määritelmää ja käytännön merkitystä. [12] Määritelmien tärkeys opetuksessa ja oppimisessa on havaittu myös muissa tutkimuksissa (mm. [29]). Näiden huomioiden pohjalta tätä kirjan osaa on rakennettu seuraavan ajatuksen pohjalle: On tärkeämpää ymmärtää asiat ja sisäistää määritelmät, kuin muistaa niihin liittyvät kaavat ulkoa. Kaavat voi aina löytää useista lähteistä kuten MAOLin taulukkokirjasta, mutta ilman ymmärrystä soveltavien tehtävien tekeminen osoittautuu haastavaksi. Lisäksi useita kaavoja ei tarvitse edes muistaa ulkoa, vaan kaavat pystyy usein johtamaan, mikäli osaaminen perustuu ensisijaisesti ymmärtämiseen. Näiden periaatteiden pohjalta on rakennettu tämän kirjan koko sisältö.

Visualisoinnin yleistä merkitystä on korostettu jo useaan otteeseen. Millainen täydentävä yhteys vallitsee visualisoinnin ja matematiikan teorian välillä? David Tall kuvailee tätä yhteyttä osuvasti kirjassaan *Advanced mathematical thinking* [25]: "Käyttämällä visuaalisia esitystapoja kuitenkaan luomatta yhteyttä matemaattiseen teoriaan luodaan oivalluksia, joista kuitenkin puuttuu matemaattinen toteutus. Toisaalta matemaattisten kaavojen ja laskujen ilmaiseminen ilman visuaalista kokonaiskuvan luomista on näkökenttää rajaavaa."[25]

Tallin mainitsemaa visualisaation ja matemaattisen ilmaisun yhteyttä on pyritty hyödyntämään muun muassa tehtävässä C.2. Erityisen tehtävän visualisaatiosta tekee kuvasarja, joka esittää saman funktion kuvaajan kahdella eri tavalla. Mitkä nämä kaksi tapaa ovat ja mitä uutta informaatiota esitystavat tuovat toisiinsa verrattuna? D. Tallin artikkelissa *Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus* [26] suositellaan eräänä oppimisen työkaluna hyödynnettävän yhden koordinaatiston akselin skaalaamista siten, että toisen akselin skaalaus pysyy ennallaan. Artikkelissa selitetään kyseisen metodin hyötyjä seuraavasti: "Etsittäessä kuvaajasta funktion maksimi- tai minimikohtaa, ei ole suurta hyötyä zoomata molempia akseleita, sillä tarkkaa kohtaa maksimi- tai minikohdalle ei silloin ole helppoa määrittää silmämääräisesti. Sen sijaan jos venytetään kuvaajaa pystysuunnassa samalla kaventaen vaakasuunnassa, kuvaaja näyttää korkeammalta ja kapeammalta, jolloin on helpompi määrittää silmämääräisesti maksimi- tai minimikohdan sijainti."[26] Tallin esittämää ehdotusta on sovellettu tehtävässä C.2 täsmällisesti juuri ehdotetun mukaisesti. Lisäksi tässä kuten useissa muissakin pohdinnoissa yhteyttä teorian ja visualisoinnin välille pyritään luomaan kysymysten avulla, jotka auttavat opiskelijaa hahmottamaan opiskeltavan asian ulkoa opettelun sijaan ymmärtämisen kautta. Turhia kysymyksiä on pyritty välttämään, sillä aina esitettäessä kysymys, tulisi sillä olla jokin tarkoitus ja päämäärä [25].

2.6 Tunti 3: Harjoitustehtävät

Vuoden 2019 Lukion opetussuunnitelma useaan otteeseen kannustaa oppiainerajat ylittävään opetukseen [19].Tehtävä 13 onkin luotu kyseistä suositusta silmällä pitäen. Tehtävässä 14 sovelletaan kappaleessa 2.5 perusteltuja kertaamiseen ja määritelmien tärkeyteen liittyviä oppimismetodeita. Valittuja Habits of mind -periaatteita hyödynnetään tehtävissä 11, 12, 13 (*visualisoiminen*) ja 13 (*kuvaileminen*) ja tehtävätyypeistä edustettuna on *matemaattisten väitteiden analysoiminen* (12).

Lähteet

[1] Adams, C. (2018). *Introducing Roots and Extrema in Calculus.* The Mathematics Teacher, Vol 112, No. 2, 132-135. National Council of Teachers of Mathematics.

[2] Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education.* Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1996, 1-32.

[3] Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). *The development of students' graphical understanding of the derivate.* The journal of mathematical behavior, Vol 16, No. 4: 399-431.

[4] Bergwall, A. & Hemmi, K. (2017). *The State of Proof in Finnish and Swedish Mathematics Textbooks - Capturing Differences in Approaches to Upper-Secondary Integral Calculus.* Mathematical Thinking and Learning, 19(1): 1-18.

[5] Boud, D. & Feletti, G. (1998). The challenge of problem-based learning. 2nd Edition. Kogan Page, London.

[6] Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C., Underhill, R., Jones, D. & Agard, P. (1992). *Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily?* Journal for Research in Mathematics Education, 23(3), 194-222.

[7] Bruner, J. (1968). *Toward a theory of instruction.* W. W. Norton and Company.

[8] Cuoco, A., Coldenberg, E. & Mark, J. (1996). *Habits of mind: An organizing Principle for Mathematics Curricula.* Journal of Mathematical Behavior, 15(4), 375-402.

[9] Dikovic, L. (2009). *Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level.* Computer Science and Information Systems 6(2), 191-203.

[10] Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1996). *On different facets of mathematical thinking.* Teoksessa R. Sternberg., T. Ben-Zeev: The nature of mathematical thinking. Mahwah (NJ): Erlbaum, 269-271.

[11] Guler, G. (2016). *The Difficulties Experienced in Teaching Proof to Prospective Mathematics Teachers: Academician Views.* Higher Education Studies. Vol 6, No. 1, 145-158.

[12] Gur, H. & Barak, B. (2007). *The Erroneous Derivative Examples of Eleventh Grade Students.* Educational Sciences: Theory and Practice, Vol 7, No. 1, 473-479.

[13] Hohenwarter, M., Jarvis, D. & Lavicza, Z. (2009). *Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute.* International Journal for Technology in Mathematics Education, 16(2), 83-87. Research Information Ltd.

[14] Kendal, M. (2001). *Teaching and learning introductory differential calculus with a computer algebra system.* PhD thesis, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne.

[15] Lesseig, K. (2016). *Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development.* International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2(2), 253-270.

[16] Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). *Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching.* Review of Educational Research, Vol 60, No. 1, 1-64.

[17] Lukiolaki 2018/714. Annettu Helsingissä 10.8.2018.

[18] Oehrtman, M., Carlson, M. & Thompson, P. (2008). *Foundational reasoning ability that promote coherence in students' function understanding.* Teoksessa M. P. Carlson and C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics, 150-171. Washington: Mathematical Association of America.

[19] Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet.* Helsinki: Opetushallitus.

[20] Park, J. (2011). *Calculus instructors' and students' discourses on the derivative.* ProQuest Dissertations Publishing.

[21] Park, J. (2015). *Is the derivative a function? If so, how do we teach it?* Educational Studies in Mathematics 89, 233-250.

[22] Siyepu, S. (2015). *Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions.* International Journal of STEM Education 2, 16 (2015).

[23] Stewart, J. (2010). *Calculus.* Mason, OH: Brooks/Cole Cengage Learning.

[24] Swan, M. (2006). *Collaborative Learning in Mathematics.* Shell Centre for Mathematics Education, University of Nottingham, England.

[25] Tall, D. (1996). *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer academic publishers.

[26] Tall, D. (2009). *Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus.* The international journal on mathematics education, 41(4), 481-492.

[27] Ubuz, B. (2001). *First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers.* Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 20 (1), 113-137.

[28] Verhoef, N., Coenders, F., Pieters, J., van Smaalen, D. & Tall, D. (2014). *Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra.* Professional Development in Education, 41(1) 109-126.

[29] Verhoef, N., Tall, D., Coenders, F. & van Smaalen, D. (2013). *The complexities of a lesson study in a Dutch situation: Mathematics teacher learning.* International Journal of Science and Mathematics Education, 12(4), 859-881. (2014).

[30] Välijärvi, J. (1997). *Millä eväillä lukiosta yliopistoon? Lukiolaisten opiskeluvalmiudet korkeakoulujen opettajien arvioimina.* Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 68.

A Tunti 1: Derivaatta funktiona, sinin ja kosinin derivaatat

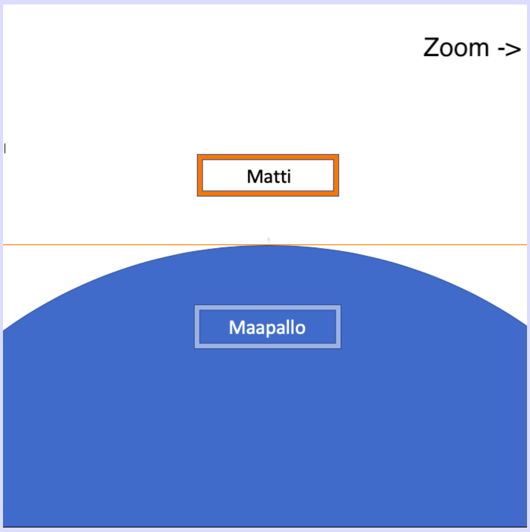
Pohdinta A.1 Olet oppinut aiemmin pisteittäisen derivaatan määritelmän ja sen, miten se määritetään kuvaajasta. Seuraavassa kuvasarjassa Matti seisoo äärettömän pitkän, massattoman ja taipumattoman puulaudan päällä **maapallolla**. Tilannetta on kuvattu avaruudesta maan suhteen paikallaan pysyvällä kameralla.

1. Tutki kuvasarjaa.

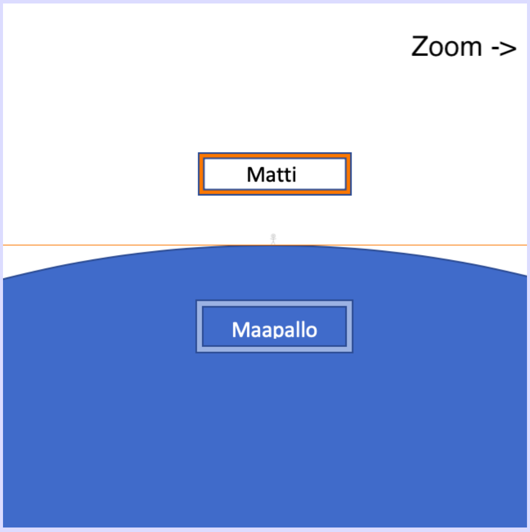
2. Rinnasta mielessäsi maan pinta funktion käyräksi ja puulauta Matin seisomapisteen tangentiksi maan pinnan käyrän suhteen. Mitä kyseinen mielikuva (ja erityisesti kuva 4) opettaa sinulle pisteittäisestä derivaatasta ja sen määritelmästä?

3. Matti lähtee kävelemään lautaa pitkin (kamerasta katsoen oikealle) pitkän matkan. Kuvaile, miten kuvan 1 puulaudan (= käyrän tangentin) suunta muuttuu, kun kamera pysyy paikallaan? Huomaako Matti muutosta?

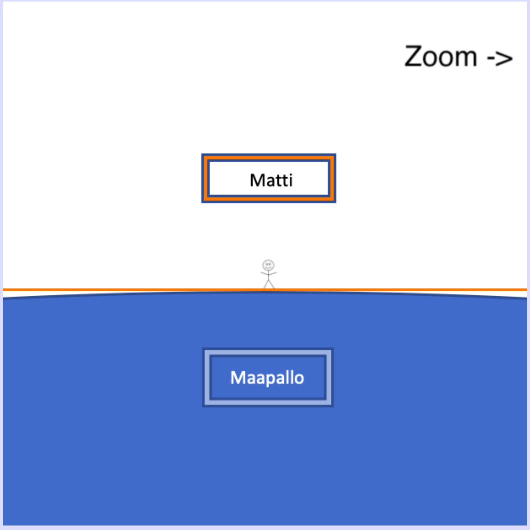
4. Miten edeltävä mielikuva laajentaa käsitystäsi derivaatasta?



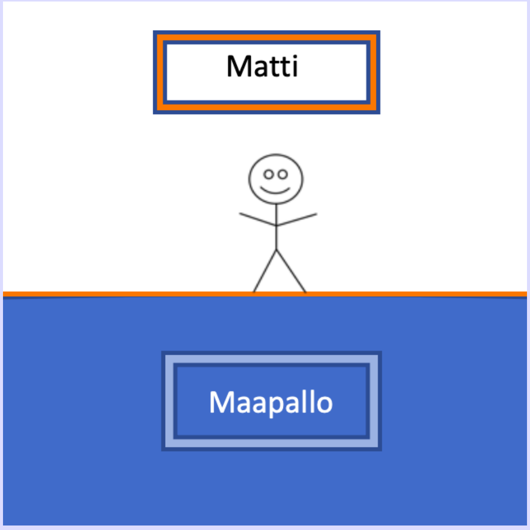
kuva 1



kuva 2



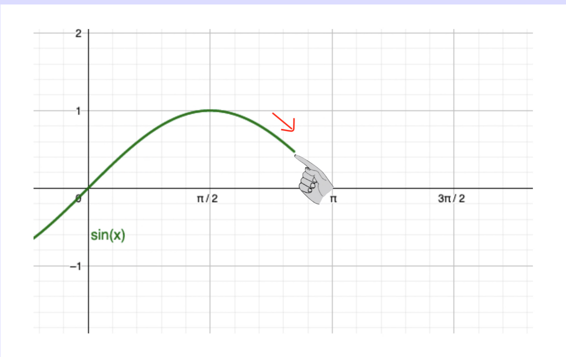
kuva 3



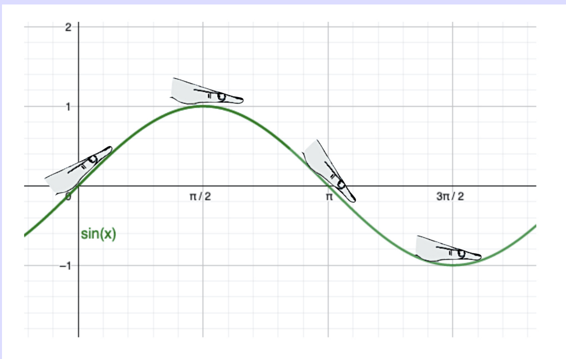
kuva 4

Pohdinta A.2 Edellisellä kurssilla tutustuit $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ -funktioihin. Seuraavassa tiedostossa on sinifunktio piirrettynä.
https://www.GeoGebra.org/m/gdqpsymg

1. Lähde kohdasta $x = 0$ oikealle ja etene sormella pitkin sinin kuvaajaa (katso *kuva 1*)
   (a) Tee huomioita funktion käyrän muodosta ja siitä, mihin suuntaan se etenee.
2. Seuraavaksi aseta suora kämmen *kuvan 2* mukaisesti kuvaajalle ja seuraa kämmenellä kuvaajan reittiä läpi vasemmalta oikealle.
   (a) Mieti, milloin sormesi osoittavat ylöspäin, alaspäin ja milloin suoraan eteenpäin.
   (b) Mitä huomiosi kertovat funktion derivaatasta kussakin kohtaa?



kuva 1

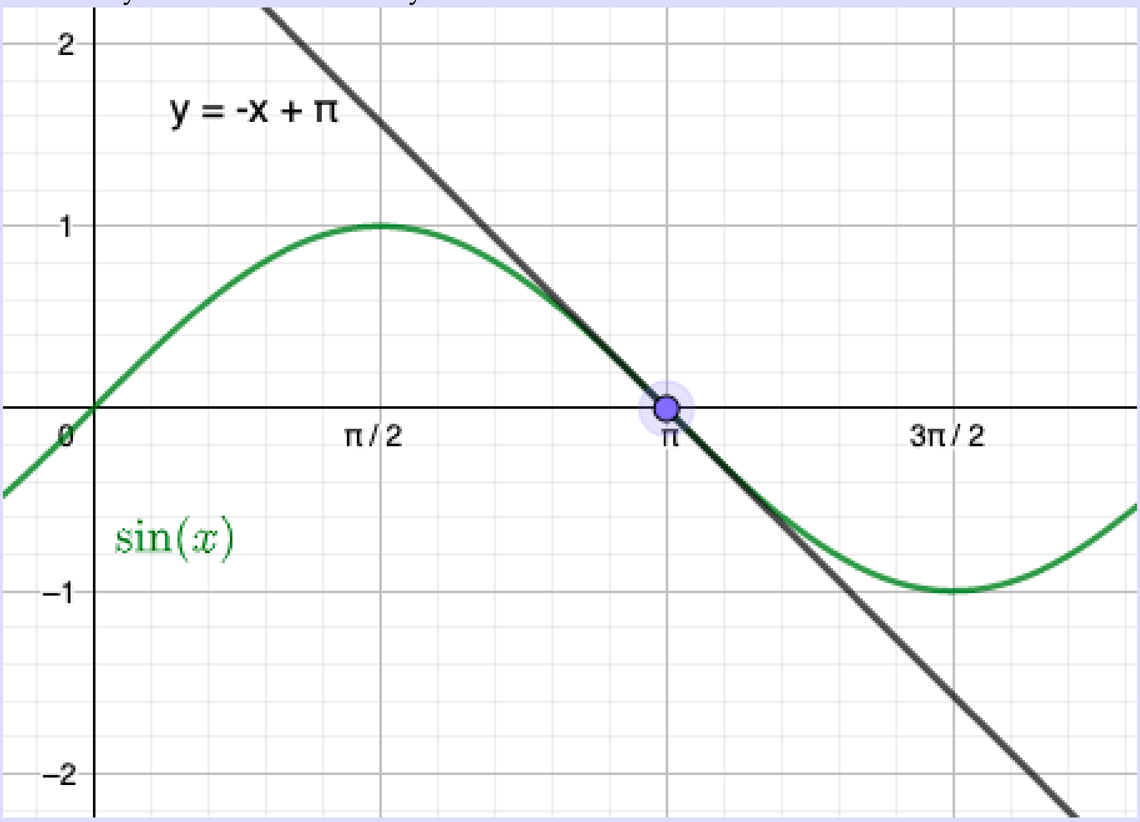


kuva 2

Tutkitaan kuvaajan tangenttia vielä hieman tarkemmin. Tätä varten avaamaasi GeoGebra-tiedostoon on luotu muutama apuväline:

3. Klikkaa tiedostosta (vasen reuna ylhäällä) näkyviin valmiiksi ohjelmoidut:
   (a) piste A
   (b) pisteelle A ohjelmoitu tangentti g.

Saat näkyviin seuraavan näkymän:



4. Tutki tangentin kulmakertoimen arvoa kuljettamalla sinikäyrää pitkin käyrälle lisättyä pistettä (tangenttisuora liikkuu mukana). Tutki kohtia
$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi \text{ ja } \frac{9\pi}{4}.$$
5. Varmista, että tiedosto on avattu GeoGebra-sovelluksessa (ei selaimessa). Lisää tutkimiesi kohtien tangenttisuorien kulmakertoimet pisteinä (x:n funktiona) samaan kuvaajaan.
6. Piirrä GeoGebralla murtoviiva jokaisen lisäämäsi pisteen välille alkaen pienimmästä x:n arvosta ja suuruusjärjestyksessä edeten suurimpaan x:n arvoon.
7. Piirrä samaan kuvaajaan $\cos(x)$.

8. Vastaa piirtämäsi kuvan avulla seuraaviin kysymyksiin.
   (a) Kuvaile sanallisesti murtoviivakuviota, jonka sait aikaan funktion $\sin(x)$ pisteittäisistä derivaatoista.
   (b) Mitä päätelmiä voit tehdä piirtämästäsi murtoviivakuviosta verrattuna $\cos(x)$ -kuvaajaan?

Kuten ehkä huomasit, funktion derivaatan laskeminen jokaisessa pisteessä on varsin aikaa vievää. Onkin järkevää määritellä funktiolle derivaattafunktio:

Määritelmä A.3 Funktion derivaatta.
Funktion f derivaattafunktio f' määritellään funktioksi, jonka saama arvo $f'(x)$ on funktion f derivaatta kohdassa x. Derivaattafunktio f' määritellään seuraavasti niissä kohdissa, joissa funktio f on derivoituva:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Huomautus A.4 Huomaa funktion derivaatan ero pisteittäisen derivaatan määritelmään: Pisteittäisen derivaatan määritelmässä

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a on jokin valittu x-akselin kohta, eli kaava antaa kyseisessä kohdassa funktion derivaatan. Siirryttäessä pisteittäisestä derivaatasta funktion derivaattaan (määritelmä A.3), ei enää valita jotakin yksittäistä pistettä a, vaan sen tilalle asetetaan muuttuja x, joka voi saada kaikkia määrittelyväliin kuuluvia arvoja. Yhdistämällä tiedot pisteittäisistä derivaatoista saadaan aikaiseksi derivaattafunktio. Derivaattafunktio $f'(x)$ on siis funktio, jonka arvo jokaisessa pisteessä x on sama kuin funktion $f(x)$ derivaatta pisteessä x.
Onkin tärkeää, että käytettäessä termiä "derivaatta" tarkennetaan, onko kyseessä pisteittäinen derivaatta $f'(a)$ vai derivaattafunktio $f'(x)$.

Lause A.5 Sinifunktion derivaatta. Funktion $\sin(x)$ derivaatta

$$D(\sin(x)) = \cos(x).$$

Pohdinta A.6 Käytetään derivaattafunktion määritelmää A.3 ja tutkitaan sen avulla funktion $\sin(x)$ derivaatan matemaattista todistusta.

1. Tutki seuraavaa todistusketjua
2. Yhdistä *numeroitu kohta*, sen *sanallinen selitys* ja tilanteessa käytetty *matemaattinen yleispätevä kaava*.

$$
\begin{aligned}
& && \frac{d}{dx}[\sin(x)] \\
& && = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&(1) && = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin x}{h} \\
& && = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\sin(h) - \sin(x) + \sin(x)\cos(h)}{h} \\
&(2) && = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\sin(h) - \sin(x)(1-\cos(h))}{h} \\
& && = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\cos(x)\sin(h)}{h} - \frac{\sin(x)(1-\cos(h))}{h}\right] \\
& && = \lim_{h\to 0} \left[\cos(x)\frac{\sin(h)}{h} - \sin(x)(\frac{1-\cos(h)}{h})\right] \\
&(3) && = \cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right) - \sin(x)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right) \\
&(4) && = \cos(x)\cdot 1 - \sin(x)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right) \\
&(5) && = \cos(x)\cdot 1 - \sin(x)\cdot 0 \\
&(6) && = \cos(x)
\end{aligned}
$$

Sanalliset selitykset:

a) Yhdistellään termejä

b) Lausekkeen $(\sin(x)/x)$ raja-arvo, kun $x \to 0$ on 1. Lauseke on esim. MAOL-taulukkokirjassa ja ilmiötä voidaan havainnollistaa GeoGebran avulla. (Syötä GeoGebraan lauseke $(\sin(x)/x)$ ja tutki esimerkiksi, mitä arvoa lauseke lähestyy, kun siirrytään positiiviselta puolelta kohti x:n arvoa 0.)

c) Raja-arvoja laskettaessa voidaan tutkittavasta muuttujasta riippumaton kerroin siirtää raja-arvolausekkeen ulkopuolelle.

d) Käytetään sinin summakaavaa, (esim. MAOL-taulukkokirjassa).

e) Mikä tahansa luku kerrottuna nollalla, saa arvon 0. Samoin mikä tahansa luku kerrottuna yhdellä, säilyttää arvonsa.

f) Lausekkeen $((1-\cos(x))/x)$ raja-arvo, kun $x \to 0$ on 0. Lauseke loytyy MAOL-taulukkokirjasta ja ilmiötä voi havainnollistaa GeoGebran avulla:

Matemaattinen yleispätevä kaava:

i) $0 \cdot x = 0$ ja $1 \cdot y = y$

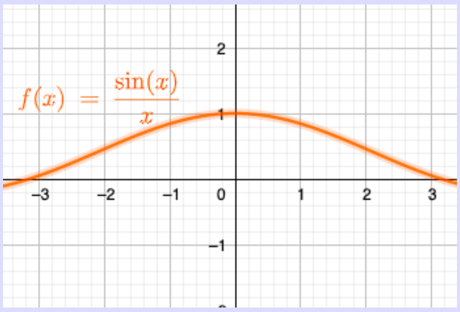
ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (katso kuva 1)

iii) $\lim_{h\to a}(f(x) \cdot g(h)) = f(x) \lim_{h\to a}(g(h))$

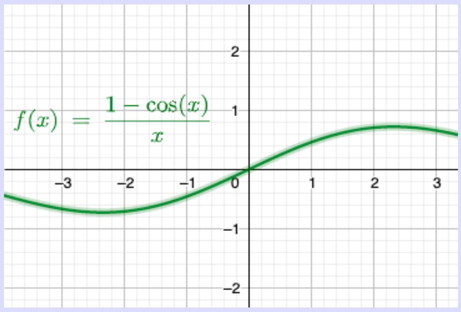
iv) $\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$

v) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$ (katso kuva 2)

vi) -A + AB = -A(1-B)



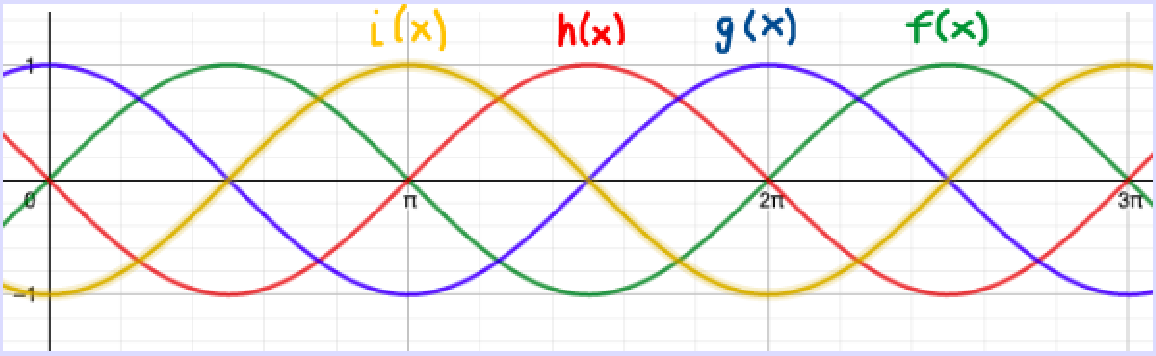
kuva 1



kuva 2

Täten on graafisesti ja matemaattisesti saatu muodostettua funktion $\sin(x)$ derivaattafunktio.

Pohdinta A.7 Kuvassa on piirrettynä funktio $f(x) = \sin(x)$ ja sen aiemmin osoitettu derivaatta $g(x) = \cos(x)$. Lisäksi on piirretty näiden x-akselin suhteen peilatut funktiot $h(x)$ ja $i(x)$. Tutki kuvion symmetrisyyttä ja erityisesti sinin ja sen derivaatan välistä yhteyttä.



1. Nimeä piirretyt funktiot $h(x)$ ja $i(x)$ taulukon ensimmäiselle riville. (Hyödynnä tietoa x-akselin suhteen tehdystä peilauksesta.)
2. Sovella tietoa $D(\sin(x)) = \cos(x)$ ja päättele kuvion avulla taulukon toiselle riville, mikä on kunkin funktion derivaatta. (Vinkki: tarkkaile symmetrisyyttä)

1) Nimeä funktio	f(x) = sin(x)	g(x) = cos(x)	h(x) =	i(x) =
2) Funktion derivaatta	f'(x) = g(x) = cos(x)	g'(x) =	h'(x) =	i'(x) =

3. Johtopäätös: Päättele tämän graafisen esityksen avulla cosinin derivaatan kaava.
4. Lisätehtävä: Sovella kuviota ja taulukkoa: Mitä funktiota derivoimalla päädytään funktioon $f(x)$?

Perustele päätelmäsi.

Lause A.8 Kosinifunktion derivaatta
Funktion $\cos(x)$ derivaatta

$$D(\cos(x)) = -\sin(x).$$

1. Tutkitaan väliä $0 < x < 2\pi$. Katso pohdintatehtävän A.7 kuvaa ja mieti seuraavia väitteitä. Pitääkö väite aina paikkansa, joskus, vai ei koskaan? Jos vain joskus, niin milloin?

i) $\sin(x) > 1$

ii) $\sin(x) < \cos(x)$

iii) $D(-\cos(x)) = \sin(x)$

iv) $D(\cos(x)) \geq 0$

v) $D(\sin(x)) = 0$

vi) $\cos(x) = \sin(x)$

2. Siiri ja Matti tutkivat trigonometristen funktioiden derivaattoja ja ovat molemmat vakuuttuneita omista väitteistään. He ovat niin varmoja väitteistään, että lupaavat tarjota toiselle suklaapatukan, jos heidän väitteensä osoittautuu vääräksi.

Heidän väitteensä ovat:

Matti: Kun funktiota $\cos(x)$ derivoidaan neljä kertaa (ts. otetaan neljäs derivaatta), saadaan tulokseksi funktion $\sin(x)$ derivaatta.
Siiri: Kun funktiota $\sin(x)$ derivoidaan neljä kertaa (ts. otetaan neljäs derivaatta), saadaan tulokseksi funktion $\cos(x)$ derivaatta.

a) Hyödynnä pohdinnan A.7 kuvaa sekä taulukkoa ja päättele sen perusteella, kumpi heistä voittaa suklaapatukan?

b) Korjaa väärä vastaus oikeaksi kahdella eri tavalla:

   i) muuttamalla tarvittava derivoimismäärä

   ii) pitämällä alkuperäinen derivoimismäärä, mutta muuttamalla siitä saatava tulos.

3. Määritä pinta-ala kolmiolle, jonka rajaavat

1. funktion $f(x) = \sin(x)$ tangentti kohdassa $x = 0$
2. suora: $x = 5$
3. x-akseli.

Voit hyödyntää halutessasi GeoGebra-sovellusta ja tehtävän A.2 GeoGebratiedostoa.

4. Ota kantaa seuraavaan toteamukseen matemaattisesti: ”Kun seisoo maassa, maapallon pinta vaikuttaa olevan suora”. Hyödynnä pohdintaa A.1.

5. Haastetehtävä: Graafisesti saatiin määriteltyä, että $D(\cos(x)) = -\sin(x)$. Todista pohdintaa A.6 ja MAOL-taulukkokirjan kaavoja hyödyntäen sama matemaattisesti. Kuvaile, mitä kussakin todistuksen vaiheessa tapahtuu.

B Tunti 2: Summan derivaatta, monotonisuus

Pohdinta B.1 Edellisen oppitunnin kertaus
Mitä opit edellisen oppitunnin aikana? Keskustele parin kanssa:

1. Mitä tarkoitetaan siirtymisellä pisteittäisestä derivaatasta derivaattafunktioon?
2. Pohdi ja perustele mihin sinin A.5 ja kosinin A.8 derivaatat perustuvat? Hyödynnä esim. pohdintaa A.7

Aiemmin on opittu muodostamaan monomin derivaatta. Tutkitaan, millainen on funktion derivaatta, jos funktio koostuu useamman monomin summasta.

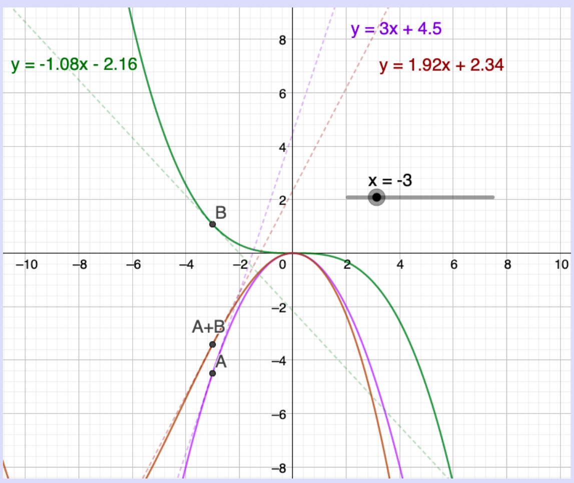
Pohdinta B.2 Summan derivaatta
Piirretään seuraavat monomeista koostuvat funktiot:

- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$
- $g(x) = -\frac{1}{25}x^3$.

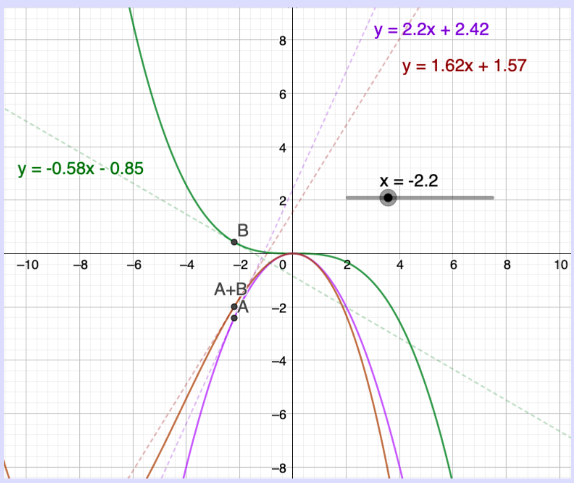
Piirretään myös funktio $h(x)$, mikä on edellisten funktioiden summa, eli

- $h(x) = f(x) + g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{25}x^3$.

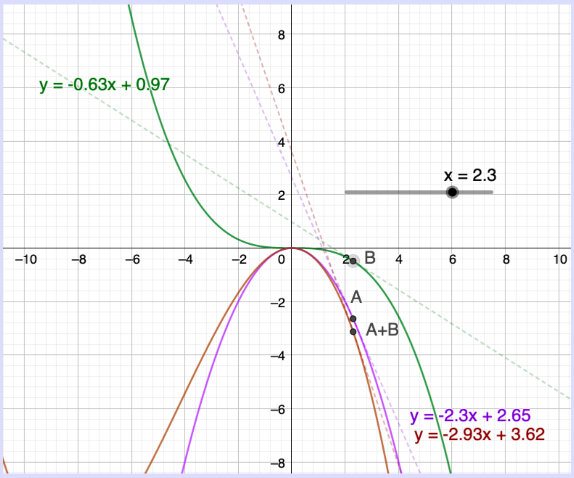
Tutkitaan kuvien 1, 2 ja 3 avulla kolmen edellä mainitun funktion kohtiin $x = -3$ (kuva 1), $x = -2,2$ (kuva 2) ja $x = 2,3$ (kuva 3) piirrettyjen tangenttien kulmakertoimia.



kuva 1



kuva 2



kuva 3

	$f(x) = -1/2x^2$	$g(x) = -1/25x^3$	$h(x) = f(x) + g(x) = -1/2x^2 - 1/25x^3$
x = - 3, kulmakerroin:	3	- 1.08	1.92
x = - 2.2, kulmakerroin:	2.2	- 0.58	1.62
x = 2.3, kulmakerroin	- 2.3	- 0.63	- 2.93

1. Tutki kuvien tapauksia $x = -3$, $x = -2,2$ ja $x = 2,3$ yksi kerrallaan: Vertaa $h(x)$:n tutkittavaan kohtaan piirretyn tangentin kulmakerrointa $f(x)$:n ja $g(x)$:n kuvaajien vastaaviin kohtiin piirrettyihin tangenttien kulmakertoimiin. Mitä huomaat?

2. Avaa kyseinen GeoGebratiedosto, josta ylläolevat kuvat on poimittu:

https://www.GeoGebra.org/m/ave8k9dd

3. Valitse liukusäätimellä haluamasi x-koordinaatti ja tutki jälleen $h(x)$:n, $f(x)$:n ja $g(x)$:n kuvaajiin liittyviä tangentin kulmakertoimia.

4. Toista sama uudella x-koordinaatilla.

Lisätehtävä (ajan salliessa): Piirrä GeoGebralla omavalintaiset kaksi monomista muodostuvaa funktiota ja tee vastaava tarkastelu niille. Mallitehtävästä B.4 voi etsiä vinkkejä siitä, kuinka GeoGebralla lisätään käyrälle piste ja sille tangenttisuora.

5. Johtopäätös: Summan derivointisääntö $D(f(x) + g(x)) =$ **Päättele!**

Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia kohdassa x. Tällöin

$$\begin{aligned}
&D(f(x)+g(x))\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
=&f'(x)+g'(x).
\end{aligned}$$

Lause B.3 Summan derivaatta.

Tulosta $D(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$ kutsutaan *summan derivointisäännöksi*.

Edellisiltä kursseilta on opittu, että useita monomeita summattaessa muodostuu polynomi. Summan derivaattasäännöllä olemmekin samalla saaneet määriteltyä monomien summan eli *polynomin* derivaatan.

Mallitehtävä B.4 Määritä funktion

$$f(x) = (2+2x^3)(4-2x)$$

derivaatta kohdissa $x = 0$ ja $x = 1,1$ eli $f'(0)$ ja $f'(1,1)$

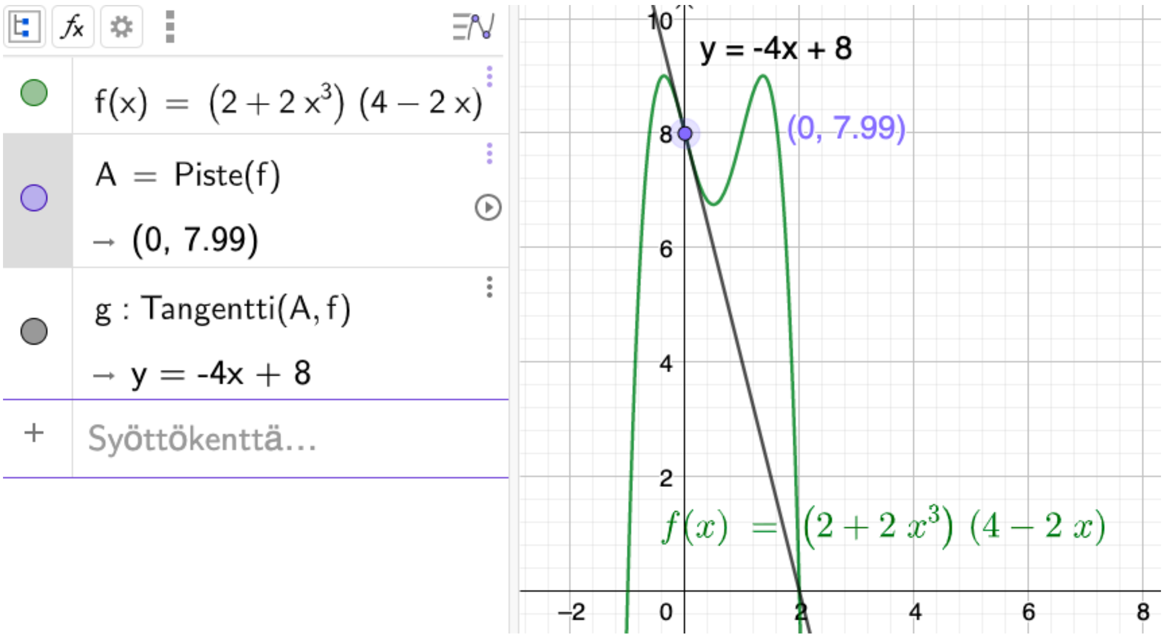
a) graafisesti

b) laskemalla.

A: Määritetään derivaatta ensin graafisesti seuraavasti:

1. Piirretään funktio $f(x) = (2+2x^3)(4-2x)$ GeoGebralla.
2. Valitaan toiminto "Piste objektilla", ja lisätään käyrälle piste.
3. Valitaan piste aktiiviseksi ja muutetaan asetuksista näkyville pisteen nimen sijaan pisteen arvo.
4. Valitaan toiminto "Tangentti", ja painetaan ensin aiemmin lisättyä pistettä ja sitten funktion kuvaajaa.

5. Valitaan tangenttisuora aktiiviseksi ja muutetaan asetuksista näkyville tangentin nimen sijaan tangentin arvo.
6. Kuljetetaan pistettä funktion kuvaajaa pitkin kohtaan $x = 0$ ja poimitaan tangentin kulmakertoimen arvo.



7. Funktion tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 0$ on -4. Täten funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa $x = 0$ on myös -4.
8. Vastaavasti määritettynä funktion tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 1,1$ on 3,74. Täten funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa $x = 1,1$ on myös 3,74.

B: Määritetään derivaatta seuraavaksi laskemalla:

1. Sievennetään aluksi lauseketta polynomiksi:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2+2x^3)(4-2x) \\ &= 2\cdot 4 + 2\cdot(-2x) + (2x^3)\cdot 4 + (2x^3)\cdot(-2x) \\ &= 8 - 4x + 8x^3 - 4x^4. \end{aligned}$$

2. Määritetään polynomin derivaattafunktio soveltamalla lausetta B.3:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + 1\cdot(-4x^{1-1}) + 3\cdot 8x^{3-1} + 4\cdot(-4x^{4-1}) \\ &= -4 + 24x^2 - 16x^3. \end{aligned}$$

(Vakiofunktion derivaatta on aina 0.)

3. Lasketaan, minkä arvon derivaattafunktio saa kohdassa $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= -4 + 24 \cdot 0^2 - 16 \cdot 0^3 \\ &= -4 + 0 + 0 \\ &= -4. \end{aligned}$$

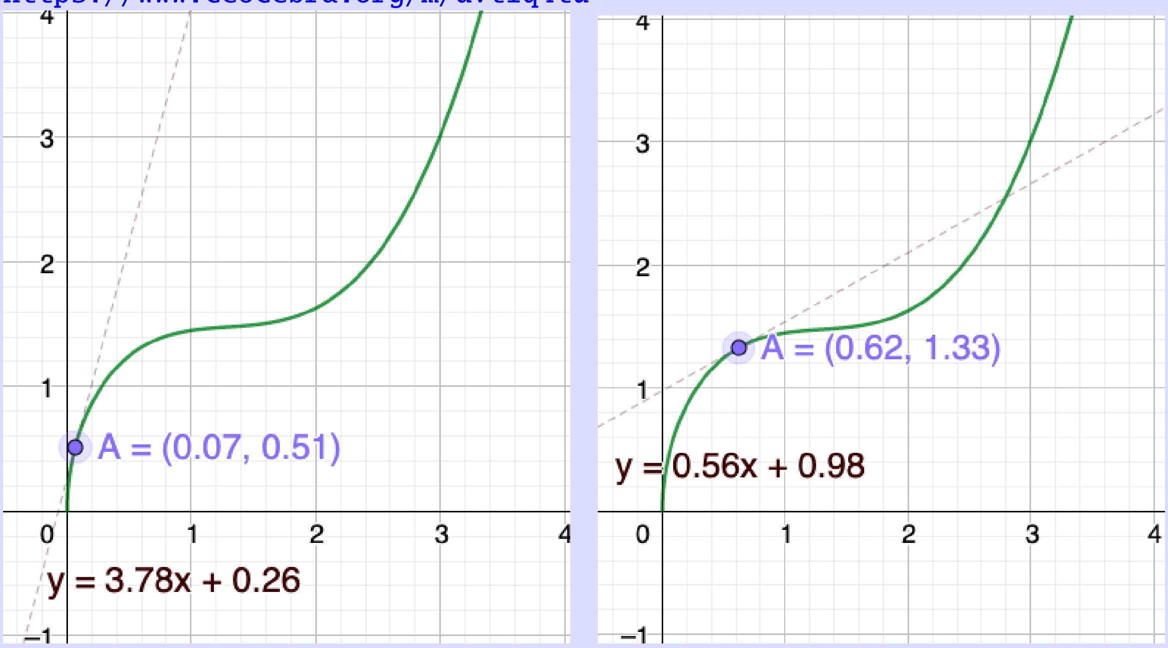
4. Lasketaan vielä, minkä arvon derivaattafunktio saa kohdassa $x = 1,1$:

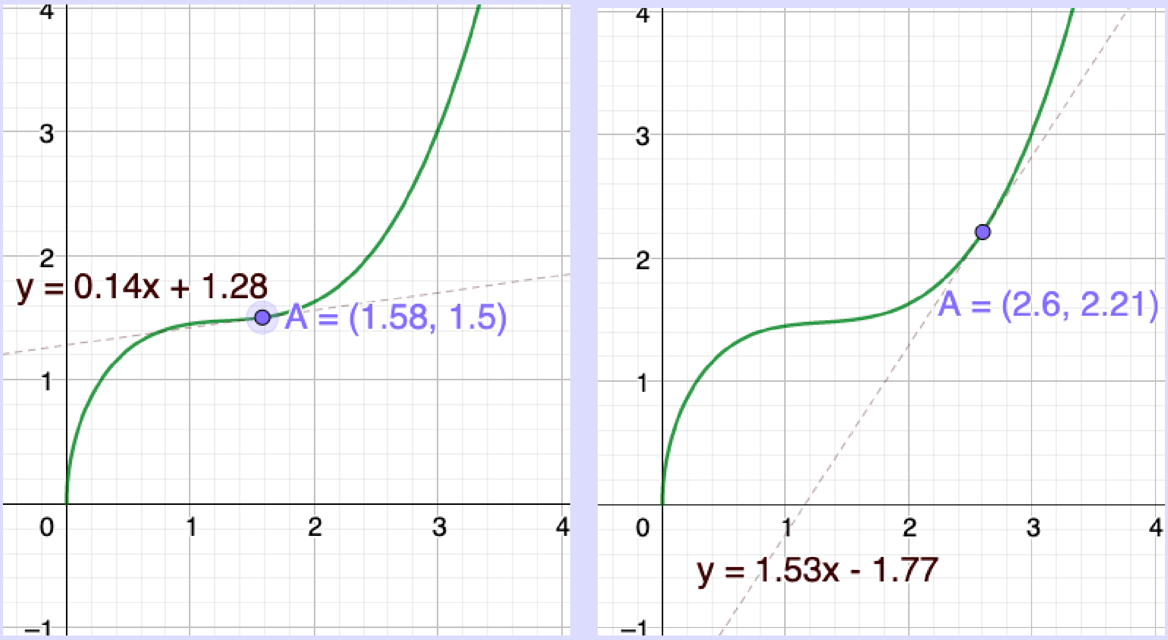
$$\begin{aligned} f'(1,1) &= -4 + 24 \cdot 1,1^2 - 16 \cdot 1,1^3 \\ &= -4 + 29,04 - 21,296 \\ &= 3,744 \approx 3,74. \end{aligned}$$

Täten ollaan saatu määritettyä sekä graafisesti että laskennallisesti funktion $f(x)$ derivaatan arvo kohdissa $x = 0$ ja $x = 1,1$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= -4 \\ f'(1,1) &\approx 3,74. \end{aligned}$$

Pohdinta B.5 Funktion kasvavuus ja vähenevyys
Tutkitaan GeoGebralla piirretyn funktion $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{4}x^3$ kuvaajan pisteisiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimia, kun $x > 0$:
https://www.GeoGebra.org/m/dvtfq4tu





Piste A ilmoittaa koordinaattinsa muodossa $A = (x, y)$
Ruskea yhtälö ilmoittaa käyrän pisteeseen A piirretyn tangentin yhtälön.

1. Avaa GeoGebra-tiedosto ja liikuta pistettä A.

2. Vastaa seuraaviin kysymyksiin:

   (a) Millaisia arvoja tutkittava kulmakerroin saa? Miten tämä voisi liittyä funktion kasvavuuteen?

   (b) Valitse kaksi satunnaista pistettä ($x > 0$) A_1 ja A_2 siten, että pisteen A_1 x-koordinaatti on pienempi kuin pisteen A_2 x-koordinaatti. Vertaa valitsemiesi pisteiden y-koordinaattien suuruusjärjestystä.

   (c) Toista sama kahdella muulla pisteellä.

   (d) Mitä ajattelet, kasvaako vai väheneekö funktion arvo (kun $x > 0$) x:n kasvaessa edellä olevien huomioiden perusteella?

3. Lisätehtävä: Tutki GeoGebralla piirrettyä funktiota: $g(x) = -f(x) = -2x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ ja vastaa edellä esitettyihin kysymyksiin funktion $g(x)$ osalta.

Linkki lisätehtävän GeoGebratiedostoon: https://www.GeoGebra.org/m/aabqw7rb

Määritelmä B.6 Aidosti kasvavuus, aidosti vähenevyys ja monotonisuus:

- Aidosti kasvavuus

- Funktio on aidosti kasvava, jos muuttujan arvojen kasvaessa funktion arvo kasvaa, eli aina kun $x_1 < x_2$ niin $f(x_1) < f(x_2)$.

- Aidosti vähenevyys
  - Funktio on aidosti vähenevä, jos muuttujan arvojen kasvaessa funktion arvo vähenee, eli aina kun $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) > f(x_2)$.

- Aito monotonisuus
  - Kun funktio on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, sanotaan funktion olevan aidosti monotoninen.

Huomautus B.7 Monotoninen vai aidosti monotoninen?
Huomaa ero aidosti monotonisen ja monotonisen funktion välillä, jossa sanaa ”aito” ei käytetä. Tällöin puhutaan vain kasvavasta tai vähenevästä funktiosta, jolloin edellä olevan määritelmän ehtojen lisäksi tilanne

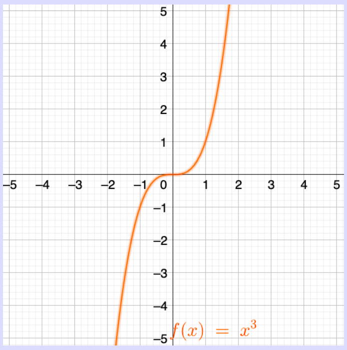
$$\text{"kun } x_1 < x_2\text{, niin } f(x_1) = f(x_2)\text{" on sallittu.}$$

Toisin sanoen, ilman aitoutta:

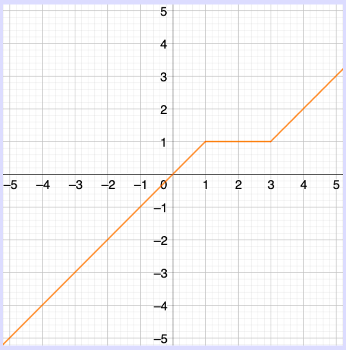
- Funktio on kasvava, jos muuttujan arvojen kasvaessa funktion arvo kasvaa tai pysyy samana, eli aina kun $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Funktio on vähenevä, jos muuttujan arvojen kasvaessa funktion arvo vähenee tai pysyy samana, eli aina kun $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Pohdinta B.8 Yhdistelytehtävä:
Määritelmää B.6 ja huomautusta B.7 hyödyntäen yhdistä funktion kuvaaja ja tieto monotonisuudesta. Osaan kuvaajista on kirjoitettu funktion yhtälö, voit hyödyntää sitä päätelmissäsi.

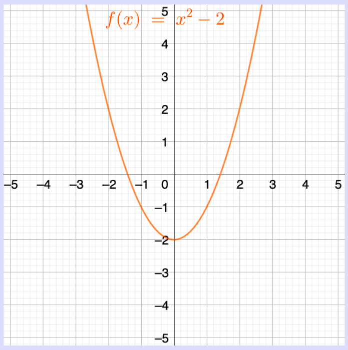
- Kategoria 1: Funktion kuvaaja



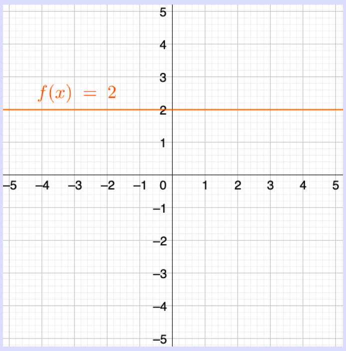
kuva 1



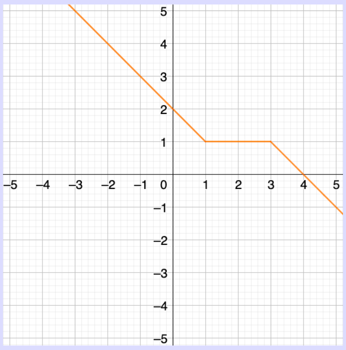
kuva 2



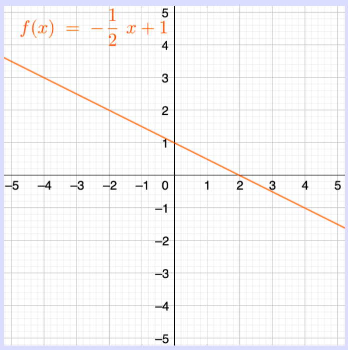
kuva 3



kuva 4



kuva 5



kuva 6

- Kategoria 2: Funktio on kaikkialla:
  - (i) kasvava (ei aidosti), mutta ei kaikkialla vähenevä
  - (ii) vähenevä (ei aidosti), mutta ei kaikkialla kasvava
  - (iii) aidosti kasvava
  - (iv) aidosti vähenevä
  - (v) samaan aikaan sekä kasvava että vähenevä
  - (vi) ei mitään edellisistä.

6. Tutki funktiota $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$. Hyödynnä mallitehtävää B.4 ja siinä esitettyjä ohjeita GeoGebran käyttöön.

a) Tutki graafisesti: Likimain missä kohdassa a funktiolle $f(x)$ piirretty tangentti on vaakasuora? Mikä on tällöin derivaattafunktion arvo, eli mikä on $f'(x)$, kun $x = a$?

b) Laske algebrallisesti käyttämättä GeoGebraa: Missä kohdassa funktion $f(x)$ derivaatta saa arvon 2? Tarkista tulos graafisesti GeoGebralla.

c) Laske algebrallisesti käyttämättä GeoGebraa: Minkä arvon funktio $f'(x)$ saa kohdassa $x = 5$? Tarkista tulos graafisesti GeoGebralla.

7. Anna esimerkki

a) funktiosta, joka on aidosti monotoninen.

b) kahdesta funktiosta, joista toinen on aidosti vähenevä ja toinen aidosti kasvava, mutta niiden summa on aidosti kasvava.

c) funktioista, joista toinen on aidosti vähenevä ja toinen aidosti kasvava, mutta niiden summa on vakiofunktio.

d) funktiosta, joka ei ole aidosti kasvava eikä aidosti vähenevä.

e) funktiosta, joka on kaikkialla sekä kasvava että vähenevä.

8. Määritä funktion

$$f(x) = (x-1)(4-2x)(-x-1)$$

derivaatta kohdissa $x = 1$ ja $x = 2$ eli $f'(1)$ ja $f'(2)$

a) graafisesti hyödyntämällä GeoGebraa

b) laskemalla.

9. Matille ja Tepolle annetaan välille $0 \leq x \leq 10$ rajattu funktion lauseke (molemmille eri) ja he piirtävät sen GeoGebraan. Monotonisuus on heistä vaikea käsite, joten he päättävät pohtia yhdessä funktioidensa monotonisuutta välillä $0 \leq x \leq 10$. He käyvät seuraavan keskustelun:

– Matti: Minun funktioni saa arvon $f(x) = 1$, kun $x = 2$ ja arvon $f(x) = 5$, kun $x = 8$. Entä sinun?

– Teppo: Minun funktioni saa aina vain negatiivisia arvoja. Mites sinulla kasvavuus?

– Matti: Olen varma, että ainakin välillä $2 \leq x \leq 6$ funktioni on aidosti kasvava. Kasvaako funktio sinulla aidosti?

– Teppo: En tiedä.. Minkä arvon funktio saa sinulla kohdassa $x = 7$?

– Matti: Funktio $f(x)$ näyttäisi saavan arvon 6 tuossa kohtaa. Millaisia eri arvoja sinulla funktio saa?

– Teppo: Kun $x = 1$, funktio saa arvon -10. Lisäksi kohdassa $x = 7$, funktio saa arvon -3 ja kohdassa $x = 9$, funktio saa arvon -1.

– Matti: Elikkä ainakin sinulla olisi kasvava funktio kyseessä, vai olisiko?

Keskustelun perusteella (ilman lisätietoja), vastaa seuraaviin kysymyksiin?

a) Voidaanko jommastakummasta/molemmista olla varma, että hänen funktionsa on tutkitulla välillä aidosti monotoninen?

b) Voidaanko jommastakummasta/molemmista olla varma, että hänen funktionsa ei ole tutkitulla välillä aidosti monotoninen?

c) Jos jommankumman/molempien funktion monotonisuudesta ei voida olla varmoja, hahmottele paperille sellaisen *kuvaukseen sopivan* funktion kuvaaja, joka

   i) on aidosti monotoninen

   ii) ei ole aidosti monotoninen.

d) Jos jommankumman/molempien funktion osalta sen monotonisuus on selvää, hahmottele *kuvaukseen sopivan* funktion erilaisia mahdollisia muotoja paperille.

10. Seuraavasta viidestä väitteestä kolme pitää paikkansa. Etsi paikkansapitävät väitteet ja virheellisten väitteiden kohdalla perustele, miksi väite ei pidä paikkaansa.

a) Kun kahden monomin derivaatat summataan yhteen, saadaan tulokseksi kyseisten monomien summasta muodostuvan polynomin derivaatta. (Vihje: B.3)

b) Funktio voi olla samaan aikaan sekä kasvava että vähenevä. (Vihje: B.7)

c) Aidosti kasvava funktio saa aina positiivisia arvoja. (Vihje: B.6)

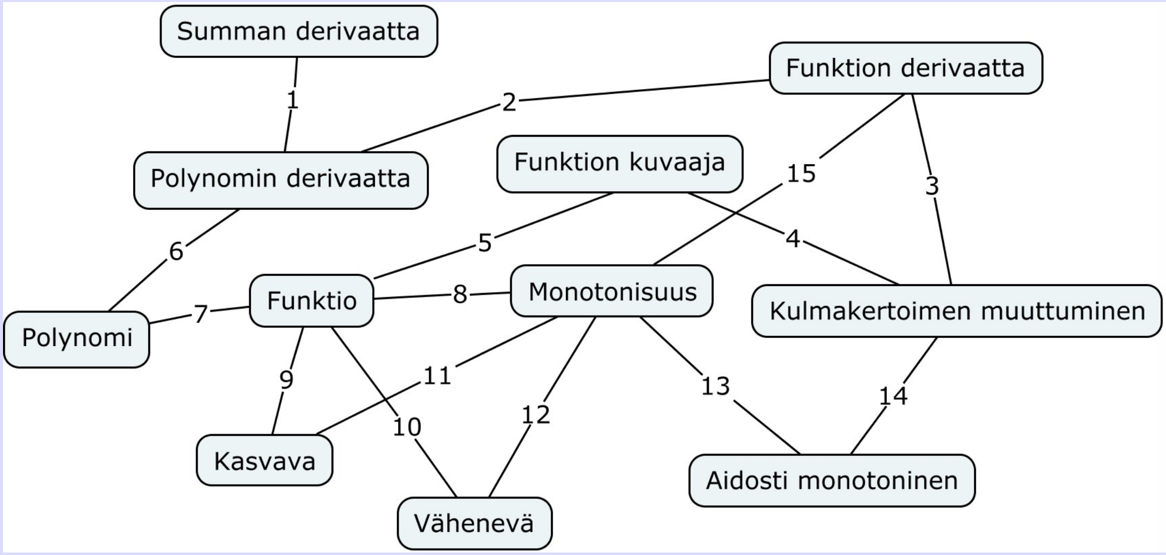
d) Aidosti vähenevä funktio on aina samalla myös vähenevä (ilman aitoutta). (Vihje: B.6 ja B.7)

e) Kasvava funktio on aina samalla myös aidosti kasvava. (Vihje: B.6 ja B.7)

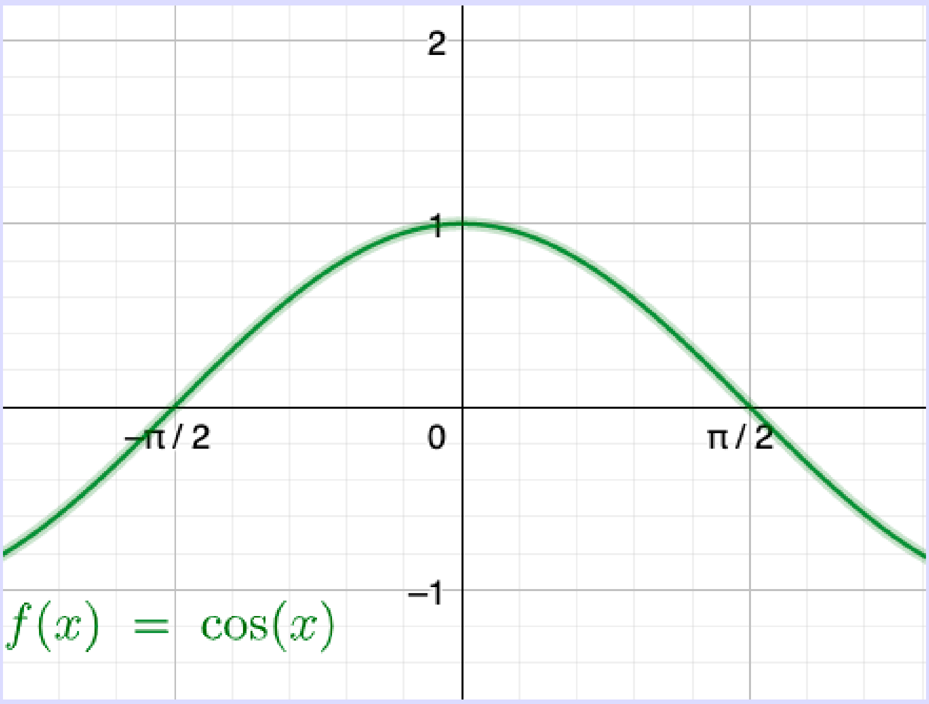
C Tunti 3: Sovelluksia trigonometristen funktioiden derivaattaan, ääriarvot

Pohdinta C.1 Edellisen oppitunnin kertaus

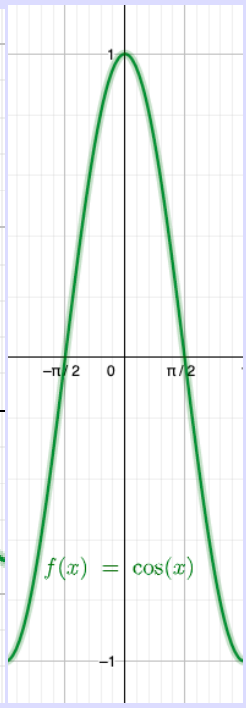
- Katso seuraavaa käsitekarttaa. Perustele jokaisen viivan kohdalle, miten käsitteet liittyvät toisiinsa. Voit halutessasi vetää lisää viivoja käsitteiden välille ja perustella niiden välisen yhteyden.



Pohdinta C.2 Kosinin ääriarvot
Kuvassa 1 ja 2 on esitetty rajattu osa funktion $f(x) = \cos(x)$ kuvaajasta. Kuvat 1 ja 2 esittävät samaa funktiota, mutta niissä on skaalattu x-akseli eri tavoilla.



kuva 1



kuva 2

1. Tee huomioita funktion $f(x) = \cos(x)$ kasvavuudesta/vähenevyydestä aluksi välillä $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

2. Tutki seuraavaksi funktion $f(x) = \cos(x)$ kuvaajaa välillä $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Mitä voit tuolla välillä todeta funktion kasvavuudesta/vähenevyydestä?
3. Tutki kohtaa $x = 0$. Mitä siinä tapahtuu funktiolle?
4. Minkä arvon funktio saa kohdassa $x = 0$. Eli mikä on $f(0)$?
5. Saako funktio kohdan $x = 0$ lähiympäristössä
   (a) vain suurempia arvoja
   (b) vain pienempiä arvoja?
6. Mikä on funktion derivaatan arvo kyseisessä kohdassa $x = 0$? (Jos derivaatan arvoa on hankala hahmottaa suoraan kuvaajasta, voit halutessasi käyttää tehtävän A.7 kuvaa apunasi.)
7. Millaisia arvoja funktion derivaatta saa ennen kohtaa $x = 0$ ja kohdan $x = 0$ jälkeen?
8. Lisätehtävä: Avaa GeoGebra ja piirrä $\cos(x)$:n kuvaaja. Tee edellä olevaa vastaava tarkastelu tutkimalla kohtaa $x = \pi$ ja sen lähiympäristöä.

Määritelmä C.3 Paikalliset ääriarvokohdat ja paikalliset ääriarvot

- Paikallinen maksimi
  - Kohtaa x_0, jossa funktio saa paikallisesti suurimman arvonsa, kutsutaan funktion paikalliseksi maksimikohdaksi.
  - Funktion arvoa paikallisessa maksimikohdassa kutsutaan funktion paikalliseksi maksimiarvoksi.
- Paikallinen minimi
  - Kohtaa x_0, jossa funktio saa paikallisesti pienimmän arvonsa, kutsutaan funktion paikalliseksi minimikohdaksi.
  - Funktion arvoa paikallisessa minimikohdassa kutsutaan funktion paikalliseksi minimiarvoksi.

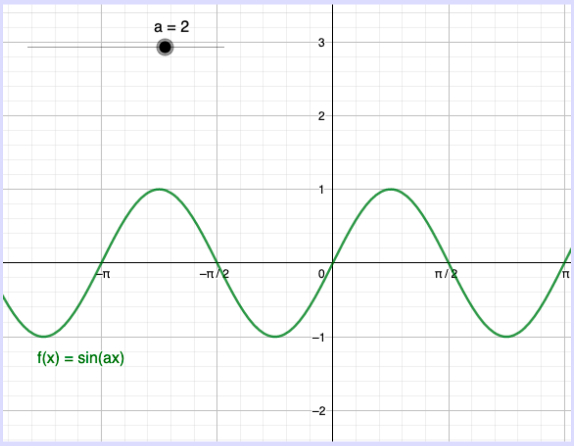
Lause C.4 Paikalliset ääriarvot ja derivaatta

Funktion derivaatta paikallisissa ääriarvokohdissa on 0, mikäli derivaatta on olemassa.

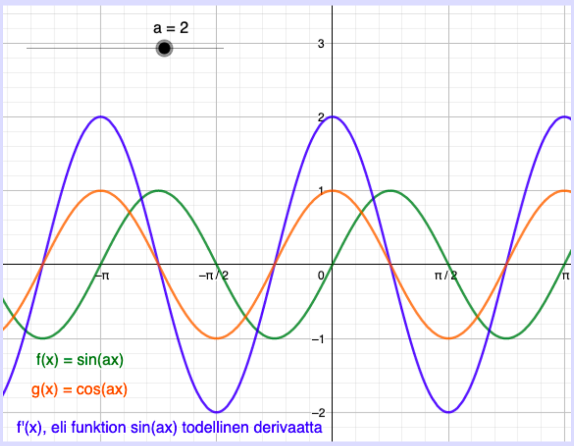
Huomautus C.5 Derivaatan nollakohta
Jos funktion derivaatta on jossakin pisteessä nolla, ei se kuitenkaan aina tarkoita, että kyseessä olisi ääriarvokohta. Derivaatta saa arvon 0 huippujen lisäksi myös ”terassi”kohdissa. Esimerkiksi funktion $f(x) = x^3$ derivaatta kohdassa $x = 0$ on 0, vaikka kyseessä ei ole ääriarvokohta.

Pohdinta C.6 Aiemmissa kappaleissa opittiin muodostamaan yksinkertaisten trigonometristen funktioiden, kuten $f(x) = \sin(x)$ tai $f(x) = \cos(x)$, derivaattafunktioita. Miten tilanne muuttuu, kun funktio saa muodon: $f(x) = \sin(ax)$, missä a on jokin reaaliluku?
Avaa seuraava GeoGebratiedosto: `https://www.GeoGebra.org/m/jhqfdkwn`
Vastaa seuraaviin kysymyksiin tutkimalla aluksi tilannetta $a = 2$ (kuva 1):

1. Muistele funktion $f(x) = \sin(x)$ jaksoa sekä muotoa. Voit muistin helpottamiseksi kokeilla muuttaa liukukytkintä tilanteeseen $a = 1$, jolloin $f(x) = \sin(1x)$.
2. Kuvaile funktion $f(x) = \sin(1x)$ eroa funktion $f(x) = \sin(2x)$ kuvaajaan. Mitä huomioita teet funktion kuvaajan pisteisiin piirrettävien tangenttien kulmakertoimien muutoksista ja jaksosta?
3. Kun $a = 2$, millaisen arvelet derivaattafunktion kuvaajan olevan tälle funktiolle? Entä mitä derivaattafunktion kuvaajalle tapahtuu, jos kasvatat a:n arvoa entisestään? Perustele kulmakertoimen avulla.
4. Aktivoi vasemmasta reunasta funktion $f(x) = \sin(ax)$ derivaatan kuvaaja $f'(x)$ ja $g(x) = \cos(x)$:n kuvaaja. (kuva 2)



kuva 1



kuva 2

5. Kokeile muuttaa liukusäätimellä a:n arvoa. Pohdi, päättelitkö oikein, kuinka $f(x)$:n derivaatta $f'(x)$ muuttuu a:n arvon muuttuessa.

6. Vertaa $f'(x)$:n ja $g(x)$:n kuvaajia toisiinsa ja päättele, ovatko seuraavat väitteet ja ajatusketjut totta vai tarua:

   (a) Kun a:n arvo kasvaa, funktion $f(x) = \sin(ax)$ jakso lyhenee.

   (b) Kun $a = 0$, funktion $f(x) = \sin(ax)$ derivaatta $f'(x)$ on vakiofunktio.

   (c) Lausetta A.5, jossa määritettiin sinin derivaatta, voidaan soveltaa tilanteeseen $f(x) = \sin(ax)$ seuraavasti: $f'(x) = \cos(ax)$.

7. Tutki funktion $f'(x)$ kuvaajaa, kun $-\pi \leq x \leq \pi$.

   (a) Kuinka monta paikallista maksimia löydät määritellyltä väliltä, kun $a = 1,5$?

   (b) Arvioi kuvasta paikalliset maksimiarvot, kun $a = 1,5$.

   (c) Entä kuinka monta paikallista maksimia löydät määritellyltä väliltä, kun $a = 3$?

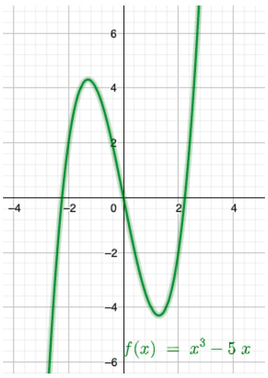
   (d) Arvioi kuvasta paikalliset maksimiarvot, kun $a = 3$.

8. Päättele edellä olevaa pohdintaa hyödyntäen funktion $f(x) = \sin(ax)$ derivaattafunktio $f'(x)$.

Funktion $f(x) = \sin(ax)$ derivaatan täsmälliseksi laskemiseksi tarvitaan sisäfunktion käsitettä, johon palataan myöhemmin tällä kurssilla.

Mallitehtävä C.7 Paikallisten ääriarvokohtien löytäminen
Tutki, milloin seuraava funktio muuttuu aidosti kasvavasta aidosti väheneväksi ja aidosti vähenevästä aidosti kasvavaksi (hyödynnä kuvaa 1). Laske funktion paikalliset ääriarvokohdat ja niitä vastaavat ääriarvot.

$$f(x) = x^3 - 5x$$



kuva 1

Lähdetään etsimään paikallisia ääriarvokohtia ja niihin liittyviä ääriarvoja derivoimalla funktio $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 5.$$

Etsitään derivaatan nollakohdat, eli kohdat, joissa $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
& 3x^2 - 5 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 3x^2 = 0 + 5 \\
\Leftrightarrow \quad & 3x^2 = 5 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 = \frac{5}{3} \\
\Leftrightarrow \quad & x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan derivaatan nollakohdat funktion $f(x)$ lausekkeeseen:

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) &= \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3 - 5 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{-10 \cdot \sqrt{15}}{9} \\
&\approx -4,30331 \\
f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) &= \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3 - 5 \cdot -\sqrt{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{10 \cdot \sqrt{15}}{9} \\
&\approx 4,30331.
\end{aligned}$$

Nähdään kuvan 1 kuvaajasta, että kohdassa $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ funktio muuttuu aidosti kasvavasta aidosti väheneväksi sekä kohdassa $\sqrt{\frac{5}{3}}$ aidosti vähenevästä aidosti kasvavaksi.

Täten paikalliset ääriarvokohdat funktiolle $f(x) = x^3 - 5x$ ovat

$$x = \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ ja } x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

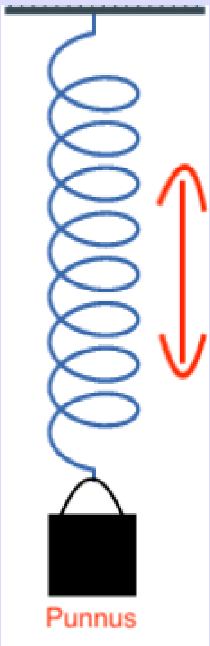
ja ääriarvokohtiin liittyvät ääriarvot ovat

$$f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{-10 \cdot \sqrt{15}}{9} \approx -4,30331$$

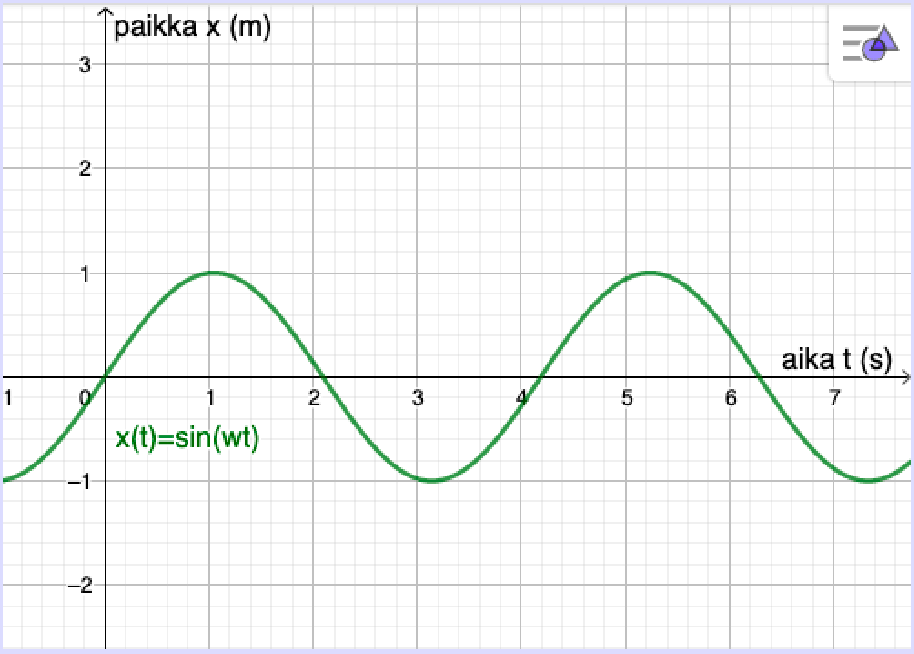
$$\text{ja} \quad f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{10 \cdot \sqrt{15}}{9} \approx 4,30331.$$

Huomaa, että jatkossa uusia työvälineitä saataessa paikallisia ääriarvokohtia ei saa enää perustella pelkän kuvaajan avulla.

Pohdinta C.8 Harmoninen värähtelijä
Pitkä vieteri roikkuu katosta ja sen päähän on kiinnitetty punnus. Systeemi laitetaan kuvan 1 mukaisesti värähtelemään pystysuunnassa. Kuvan 2 kuvaaja kuvastaa vieterin paikkaa ajan funktiona.



kuva 1



kuva 2

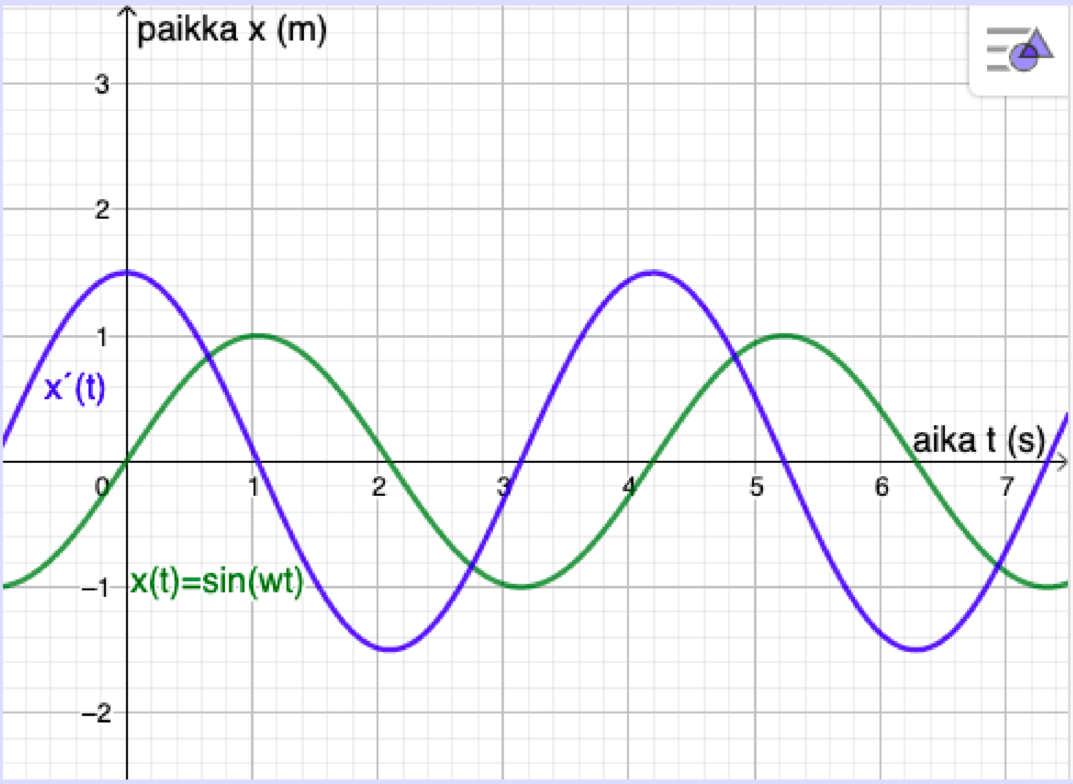
Vieterin paikkaa x (yksikkö: metri) ajan t (yksikkö: sekunti) funktiona kuvaa funktio $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$, missä $B = x(0)$ (kappaleen sijainti tarkastelun alkuhetkellä) ja $A = x'(0)/\omega$, ω = kulmanopeus. Tarkastelu on aloitettu siten, että $x(0) = 0$, mistä seuraa, että $B = 0$. Lisäksi on valittu sellainen jousi ja sopivamassainen punnus, että ω saa arvon $x'(0)$, jolloin $A = 1$. Funktio yksinkertaistuu muotoon:

$x(t) = 1 \cdot \sin(\omega t) + 0$, eli

$$x(t) = \sin(\omega t)\,.$$

1. Etsi kuvaajasta silmämääräisesti yksi ajanhetki, jolloin vieteri on äärimmilleen venyneenä, eli milloin punnus on kauimpana katosta?
2. Hyödynnä tehtävän C.6 GeoGebra-tiedostoa ja pohdi, miten kulmanopeus ω vaikuttaa funktion $x(t)$
   (a) jaksonaikaan
   (b) paikallisiin maksimi- ja minimikohtiin ja niitä vastaaviin arvoihin.

Kuvassa 3 esitetään funktion $x(t)$ derivaatan $x'(t)$ kuvaaja.



kuva 3

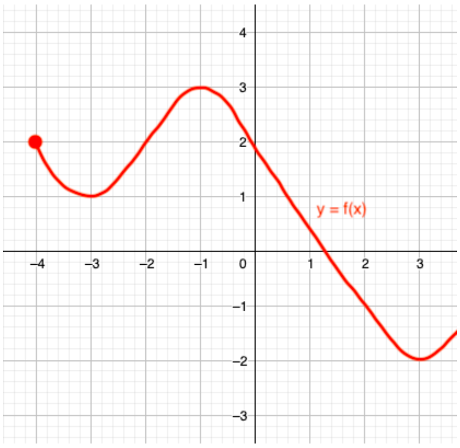
Pohdi määritelmää C.3 ja lausetta C.4 ja vastaa seuraaviin kysymyksiin:

3. Päättele funktion ja derivaatan kuvaajien perusteella, kumpi seuraavista pitää paikkansa kuvan 3 tapauksessa:

$$\omega \leq 1$$
$$\omega > 1.$$

4. Millaisia arvoja funktio $x(t)$ saa derivaatan nollakohdissa?
5. Kuvaile, millaista punnuksen liike on derivaatan nollakohdissa, eli kohdissa $x'(0)$?
6. Mitä (t, x) -koordinaatiston derivaatta siis kuvaa?
7. Minä ajanhetkinä punnus liikkuu nopeiten?

11. Seuraavassa on piirrettynä funktio $f(x)$.



Milloin funktio on

a) kasvava

b) vähenevä?

Määritä kuvan perusteella likimääräisesti funktion

i) paikalliset ääriarvokohdat ja niiden tyypit

ii) ääriarvokohtiin liittyvät ääriarvot.

12. Ryhmä opiskelijoita piirtää GeoGebralla koordinaatistoon sekä funktion $f(x) = \cos(x)$ että funktion $g(x) = \sin(x)$ kuvaajat. Opiskelijat esittävät väitteitä liittyen edellä mainittujen funktioiden kuvaajiin. Tutki seuraavien väitteiden ja niihin liittyvien perustelujen paikkansapitävyyttä.

a) Kun tutkitaan aluetta $a < x < b$, on mahdollista valita luvut a ja b siten, että funktiolla $f(x)$ on kaksi paikallista ääriarvokohtaa enemmän kuin funktiolla $g(x)$.

b) Ei ole olemassa matemaattista keinoa luetella funktion $f(x)$ kaikkia paikallisia maksimikohtia, sillä niitä on ääretön määrä.

c) Kaikki sekä $f(x)$:n että $g(x)$:n paikalliset minimiarvot ovat arvoltaan samat.

13. Ainerajat ylittävä tehtävä.

Tutki pohdinnassa C.8 esitettyä vieterin värähtelyä kuvaavaa kuvaajaa.

a) Mitä yksinkertaistuksia sisältyy ajatukseen, jonka mukaan värähtelyn paikalliset maksimi- ja minimikohdat pysyvät samoina värähtelyn jatkuessa pitkään?

b) Hahmottele paperille, millainen vieterin liikettä kuvaava kuvaaja todellisuudessa on? Mitä tapahtuu funktion paikallisille maksimi- ja minimiarvoille ajan kuluessa?

c) Perustele hahmotelmaasi. Mitkä seikat selittävät ilmiötä?

14. Ryhmätyö: Muodostakaa 3-4 hengen ryhmiä ja kerratkaa kolmella edellisellä tunnilla opiskeltu aineisto seuraavia kertaamisen keinoja käyttäen:

a) Esittäkää toisillenne kysymyksiä koskien esitettyjä määritelmiä A.3, B.6 ja C.3. Kiinnittäkää erityishuomiota siihen, mitä määritelmä todellisuudessa sanoo ja keksikää matemaattisia esimerkkejä, joiden avulla tutkitte määritelmien merkitystä.

b) Luokaa yksi iso käsitekartta, johon laitatte tärkeimpiä käsitteitä kolmen edellisen tunnin ajalta. Vetäkää viivoja käsitteiden välille ja selittäkää niiden välinen yhteys toisillenne joko suullisesti tai kirjallisesti.

D Opettajan opas

D.1 Tuntijako

75 minuutin oppitunteja käytettäessä suositellaan seuraavaa tuntijakoa, jota voi tarvittaessa muokata luokan tarpeitten mukaiseksi.

1. 1 oppitunti: Derivaatta funktiona, sinin ja kosinin derivaatat
2. 1 oppitunti: Summan derivaatta, monotonisuus
3. 1 oppitunti: Sovelluksia trigonometristen funktioiden derivaattaan, ääriarvot

Jos ylimääräistä aikaa on käytettävissä, voidaan kahden ensimmäisen oppitunnin kokonaisuus laajentaa kolmen oppitunnin mittaiseksi.

D.2 Tunti 1: Derivaatta funktiona, sinin ja kosinin derivaatat

Pohdinta A.1

Tämän lämmittelytehtävän tarkoituksena on edetä pisteittäisestä derivaatasta konkreettisen esimerkin kautta kohti derivaattafunktiota. Korosta opiskelijoille tehtävässä esitetyn mielikuvan ja esimerkin yhteyttä derivaattaan, jotta maapallo-mielikuvasta saadaan mahdollisimman tehokas opetuksellinen hyöty.

Vastaukset

Mitä kyseinen mielikuva (ja erityisesti kuva 4) opettaa sinulle pisteittäisestä derivaatasta ja sen määritelmästä?

Kun zoomataan todella tarkasti johonkin derivoituvan käyrän kohtaan, tangenttisuora ja käyrä näyttävät samalta.

Matti lähtee kävelemään lautaa pitkin (kamerasta katsoen oikealle) pitkän matkan. Kuvaile, miten kuvan 1 puulaudan (= käyrän tangentin) suunta muuttuu, kun kamera pysyy paikallaan? Huomaako Matti muutosta?

Massaton ja taipumaton puulauta asettuu Matin jalkojen alla aina maapallon tangentin suuntaisesti, jolloin kameran pysyessä paikallaan käyrän tangentista tulee kuvakulman suhteen laskeva suora. Matti ei huomaa muutosta, koska hän elää aina omassa ”zoomatussa maailmassaan”, jossa tangenttisuora (lauta) ja käyrä (maan pinta) näyttävät samansuuntaisilta.

Miten edeltävä mielikuva laajentaa käsitystäsi derivaatasta?

Ymmärrys kehittyy siitä, mistä tangenttisuorassa on todella kysymys. Samalla päästään myös eroon pelkästä pisteittäisestä derivaatan ajattelutavasta.

Pohdinta A.2

Seuraavassa linkissä piirretty opettajaa varten pohdinnan graafinen esitys loppuun asti: https://www.geogebra.org/classic/bw65ekpy

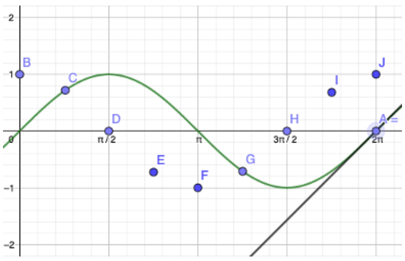
Tehtävässä aktivoidaan opiskelijoita ja hyödynnetään useita eri aisteja. Opettajan on suositeltavaa itse näyttää mallia, kuinka käyriä tutkitaan sormen ja käden avulla. Kämmentä käytettäessä tulisi korostaa, että kämmentä on tärkeää pitää suorana. Opiskelijoita, jotka ovat edistyneitä GeoGebran käyttäjiä, voidaan pyytää ennen murtoviivan piirtämistä tutkimaan pisteitä esimerkiksi tuplasti tiheämmin: $x = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$ jne, jolloin murtoviivakuviosta tulee entistä kuvaavampi. Lisäkysymysehdotus: ”Miltä murtoviivakuvio näyttäisi, jos tutkittaisiin pisteitä jälleen tuplasti tiheämmin? Entä taas siitä tuplasti tiheämmin... jne?”

Vastaukset

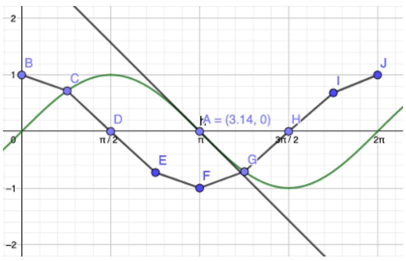
Aseta suora kämmen kuvan 2 mukaisesti kuvaajalle ja seuraa kämmenellä kuvaajan reittiä läpi vasemmalta oikealle. Mitä huomiosi kertovat funktion derivaatasta kussakin kohtaa?

Kun sormet osoittavat ylöspäin, on derivaatta positiivinen. Kun sormet osoittavat alaspäin, on derivaatta negatiivinen. Kun sormet osoittavat suoraan, on derivaatta nolla.

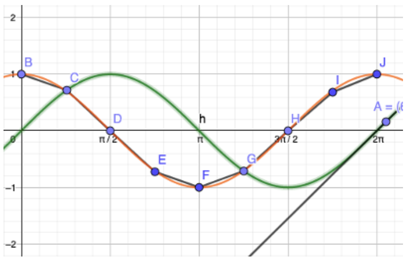
Murtoviivakuvion piirtämisen vaiheet ja sen vertaileminen $\cos x$ *-kuvaajaan:*



kulmakertoimet pisteinä



murtoviivakuvio



vertailu $\cos x$ -kuvaajaan

Mitä päätelmiä voit tehdä piirtämästäsi murtoviivakuviosta verrattuna cosinin kuvaajaan?

Pisteet, joista murtoviivakuvio muodostuu, ovat $\cos(x)$ -käyrän pisteitä. Mitä tiheämmästä pisteparvesta murtoviivakuvio on muodostettu, sitä tarkemmin kuviosta tulee $\cos(x)$ -käyrän muotoinen.

Huomautus A.4

Huomautuksen tarkoituksena on muistuttaa sekä opettajaa että opiskelijoita pisteittäisen derivaatan ja derivaattafunktioiden merkintöjen eroavaisuuksista. Pohtikaa yhdessä opiskelijoiden kanssa sitä, mitä derivaattafunktio tarkoittaa. Derivaattafunktion määritelmän yhteydessä voit mainita seuraavan ajattelutavan: Derivaattafunktio $f'(x)$ on funktio, jossa x kuvautuu pisteeseen $(x, f(x))$ piirretyn tangentin kulmakertoimeksi.

Pohdinta A.6

Tämä pohdinta on tarkoitettu ensisijaisesti opiskelijan hyödyksi, mutta samalla myös rohkaisemaan opettajaa todistusten käyttämiseen. Tehtävässä on kolme kategoriaa, joista yhdistellään toisiinsa liittyvät sisällöt. Tehtävään lisätyt kuvat ovat lisätty vaikeiden raja-arvojen käytännön merkityksen ymmärtämisen selkeyttämiseksi. Auta opiskelijoita ymmärtämään, kuinka raja-arvon voi näissä tapauksissa nähdä kuvista. Edistyneimmät opiskelijat voivat halutessaan yrittää johtaa todistuksessa käytetyn taulukkokirjasta löytyvän kaavan $\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$. Opiskelijoiden kanssa on lopuksi myös hyvä pohtia todistuksen rakennetta ja sitä, kuinka todistusta on lähdetty tekemään.

Vastaukset

- 1, d, iv
- 2, a, vi
- 3, c, iii
- 4, b, ii
- 5, f, v
- 6, e, i

Pohdinta A.7

Tehtävän pääasiallisena tarkoituksena on löytää kosinin derivaatta. Auta opiskelijoita ymmärtämään, mitä tarkoitetaan x-akselin suhteen peilatuilla funktioilla, jotta sen pohtimiseen ei kuluisi aikaa. Lisätehtävässä pyritään soveltamaan opittua ja hahmottamaan sinin ja kosinin symmetrisyyttä. Lisätehtävän kaltaisia lisäkysymyksiä kannattaakin esittää opiskelijoille, jotka kaipaavat tehtävään lisähaastetta.

Vastaukset

1) Nimeä funktio	f(x) = sin(x)	g(x) = cos(x)	h(x) = -sin(x)	i(x) = -cos(x)
2) Funktion derivaatta	f'(x) = g(x) = cos(x)	g'(x) = h(x) = -sin(x)	h'(x) = i(x) = -cos(x)	i'(x) = f(x) = sin(x)

Johtopäätös: Päättele tämän graafisen esityksen avulla cosinin derivaatan kaava.

Katso A.8

Lisätehtävä: Sovella kuviota ja taulukkoa: Mitä funktiota derivoimalla päädytään funktioon $f(x)$?

Derivoimalla funktiota $i(x)$.

D.3 Tunti 2: Summan derivaatta, monotonisuus

Pohdinta B.1

Kertaustehtävä voidaan toteuttaa parikeskusteluna tai vaihtoehtoisesti myös isommissa ryhmissä. Sen jälkeen voidaan lyhyesti koota pohditut asiat koko luokan kanssa.

Vastaukset

Mitä tarkoitetaan siirtymisellä pisteittäisestä derivaatasta derivaattafunktioon?

Derivaattaa ei enää tutkita ainoastaan yksittäisissä pisteissä, vaan muodostetaan uusi funktio, jonka arvot kuvaavat alkuperäisen funktion derivaattaa kaikkialla, missä funktio on derivoituva.

Pohdi ja perustele mihin sinin ja kosinin derivaattojen määritelmät perustuvat?

Tutkimalla pohdintoja A.2 ja A.7 saadaan graafisesti perusteltua sinin ja kosinin derivaatat. Korosta, että graafisen esityksen lisäksi on tärkeä linkittää visuaaliset huomiot teoriaan. Sinin ja kosinin derivaatat todistetaan tehtävissä A.6 ja 5.

Pohdinta B.2

Pohdinnan GeoGebra-tiedostoon on luotu liukusäädin, joka ilmaisee tutkittavan kohdan. Säädintä säätämällä liikkuu samalla kaikki tutkittavat pisteet (A, B ja $A + B$) liukusäätimen mukaiseen kohtaan. Tämä helpottaa tutkimista, sillä kaikkia kolmea pistettä ei tarvitse siirtää tarkasti samaan kohtaan. Liukusäätimen käyttöä ja sen merkitystä kannattaa silti opastaa opiskelijoille yhteisesti ja yksittäin. Ehdotus: Jos aika sallii, opiskelijat voidaan jakaa ryhmiin tekemään pohdinnan lopussa olevaa lisätehtävää, minkä jälkeen ryhmät voivat esitellä muodostamiaan funktioita ja niistä tehtyjä huomioita muille.

Vastaukset

Tutki kuvien tapauksia $x = -3$, $x = -2,2$ ja $x = 2,3$ yksi kerrallaan: Vertaa $h(x)$:n tutkittavaan kohtaan piirretyn tangentin kulmakerrointa $f(x)$:n ja $g(x)$:n kuvaajien vastaaviin kohtiin piirrettyihin tangenttien kulmakertoimiin. Mitä huomaat?

Tangentin kulmakerroin, joka liittyy $h(x)$:n kuvaajaan on $f(x)$:n ja $g(x)$:n kuvaajiin liittyvien tangenttien kulmakertoimien summa.

Johtopäätös: Katso B.3

Pohdinta B.5

Tämän pohdinnan tarkoituksena on luoda pohjaa sille, mitä tarkoitetaan kasvavuudella ja vähenevyydellä. Kyseisiä termejä ei kuitenkaan vielä ole aiemmin esitelty, vaan ilmiötä lähdetään tutkimaan ensin graafisesti. Mikäli opiskelija tekee pohdinnan nopeasti, häntä voidaan pyytää tutkimaan useita muita pistepareja ja suorittamaan lisätehtävän. Lisätehtävässä tutkitaan ensimmäisen funktion x-akselin suhteen peilattua funktiota, minkä voi tuoda esille lisätehtävää ja sen antia pohdittaessa.

Vastaukset

Millaisia arvoja tutkittava kulmakerroin saa? Miten tämä voisi liittyä funktion kasvavuuteen?

Kulmakerroin saa ainoastaan positiivisia arvoja ja kahdesta pisteestä korkeamman x-koordinaatin omaavan pisteen y-koordinaatti on aina toisen pisteen y-koordinaattia suurempi. Täten funktion arvo kasvaa.

Lisätehtävä: Tutki GeoGebralla piirrettyä funktiota: $g(x) = -f(x) = -2x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{4}x^3$. *Millaisia arvoja tutkittava kulmakerroin saa? Miten tämä voisi liittyä funktion kasvavuuteen?*

Kulmakerroin saa ainoastaan negatiivisia arvoja ja kahdesta pisteestä korkeamman x-koordinaatin omaavan pisteen y-koordinaatti on aina toisen pisteen y-koordinaattia pienempi. Täten funktion arvo vähenee.

Huomautus B.7

Tämän huomautuksen avulla pyritään selkeyttämään monotonisuuden ja aidon monotonisuuden välistä eroa. Kappaleen harjoitustehtäviä ja yleistä ymmärtämistä varten opiskelijoille kannattaa selittää, että jokin funktio voi olla samaan aikaan sekä kasvava että vähenevä. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, jos joko kasvavuus tai vähenevyys tai molemmat ovat aitoja.

Pohdinta B.8

Edellistä huomautusta ja sitä edeltävää määritelmää sovelletaan tässä pohdinnassa. Tässä vaiheessa paloittain määriteltyä funktiota ei vielä ole opittu, joten paloittain määriteltyjen funktioiden kohdalla ei ole kyseistä termiä tarpeen esitellä, vaan voidaan keskittyä ainoastaan tutkittavaan asiaan, eli monotonisuuteen. Opettaja voi auttaa opiskelijoita tekemään oikeita johtopäätöksiä poimimalla pohdinnan B.5 mukaisesti kuvaajista kaksi pistettä ja vertaamalla niiden y-koordinaatteja toisiinsa. Edistyneemmät opiskelijat voivat keksiä lisää kuhunkin kategoriaan sopivia funktioita.

Kuvan 1 tapauksessa kohdan $x = 0$ ympäristössä saattaa opiskelijoilla olla kuvan perusteella hankalaa hahmottaa, onko funktio kasvava vai aidosti kasvava. Tämän tutkimisessa avuksi tulee funktion yhtälö, johon voidaan sijoittaa mielivaltaisen lähellä $x = 0$ olevia lukuja (esim. $x = 0.001$ ja $x = -0.001$). Täten voidaan päätellä kyseessä olevan aidosti kasvava funktio.

Vastaukset

- Kuva 1, $f(x) = x^3$: (iii) aidosti kasvava
- Kuva 2, paloittain määritelty funktio: (i) kasvava (ei aidosti), mutta ei kaikkialla vähenevä
- Kuva 3, $f(x) = x^2 - 2$: (vi) ei mitään edellisistä
- Kuva 4, $f(x) = 2$: (v) samaan aikaan sekä kasvava että vähenevä
- Kuva 5, paloittain määritelty funktio: (ii) vähenevä (ei aidosti), mutta ei kaikkialla kasvava
- Kuva 6, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$: (iv) aidosti vähenevä

D.4 Tunti 3: Sovelluksia trigonometristen funktioiden derivaattaan, ääriarvot

Pohdinta C.1

Pohdinnassa kerrataan edellisen oppitunnin antia. Kiinnitä opiskelijoita varten erityistä huomiota siihen, miten asiat linkittyvät toisiinsa. Täten opitut aihepiirit eivät jää irrallisiksi, vaan muodostavat yhtenäisen kokonaisuuden.

Pohdinta C.2

Aiemmin on tutkittu kasvavuutta ja vähenevyyttä yleisesti. Tässä pohdinnassa tutkitaan kasvavuutta/vähenevyyttä annetuilla väleillä. Kiinnitä erityistä huomiota, että opiskelijat ymmärtävät tämän pohdinnan jälkeen kyseisen eron. Tämän pohdinnan avulla pyritään samalla luomaan pohjaa paikallisten ääriarvokohtien ymmärtämiselle.

Vastaukset

Vastaukset tehtävässä esitetyn kuvan alla oleviin kysymyksiin:

1. Kyseisellä välillä funktio on kasvava.
2. Kyseisellä välillä funktio on vähenevä.
3. Kohdassa $x = 0$ funktio f vaihtuu aidosti kasvavasta aidosti väheneväksi.
4. $f(0) = 1$
5. Funktio saa kohdan $x = 0$ lähiympäristössä ainoastaan pienempiä arvoja kuin 1.
6. Kun funktio f vaihtuu kohdassa $x = 0$ aidosti kasvavasta aidosti väheneväksi, funktion derivaatan arvo on 0.

7. Derivaatta saa positiivisia arvoja ennen kohtaa $x = 0$ ja negatiivisia arvoja kohdan $x = 0$ jälkeen.

8. Funktio f vaihtuu kohdassa $x = \pi$ aidosti vähenevästä aidosti kasvavaksi. Tällöin funktion derivaatan arvo on myös 0.

Huomautus C.5

Tämän huomautuksen sisältö saattaa jäädä joskus liian pienelle huomiolle, minkä vuoksi se on tuotu korostettuna esiin tässä kirjassa.

Pohdinta C.6

Kannusta tässä pohdinnassa opiskelijoita lukemaan ohjeet huolella ja järjestyksessä. Avusta tarvittaessa GeoGebran käytössä! Keskittykää olennaiseen, eli siihen, miten funktion ja sen derivaatan kuvaajat linkittyvät toisiinsa. Auta opiskelijoita tekemään päätelmiä siitä, kuinka funktion ja sen derivaatan kuvaajien paikallisista maksimiarvoista pystyy päättelemään funktion derivaatan lausekkeen.

Vastaukset

1. Sinikäyrä on esitettynä myös tehtävässä A.2.

2. Siirryttäessä $\sin(1x)$ kuvaajasta $\sin(2x)$ kuvaajaan jakso lyhenee puoleen. Lisäksi jyrkimmissä kohdissa funktion kuvaajan pisteisiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimien arvot ovat itseisarvoltaan selvästi kasvaneet.

3. A:n kasvaessa tangentin kulmakertoimen itseisarvot saavat funktion kuvaajan jyrkissä kohdissa suurempia arvoja. Täten myös derivaatan itseisarvot saavat suurempia arvoja.

4. (tyhjä)

5. (tyhjä)

6. (a) totta
   (b) totta
   (c) tarua

7. (a) 1
   (b) Välin ainoa paikallinen maksimiarvo on 1,5.
   (c) 3
   (d) Jokainen välin paikallisista maksimiarvoista on 3.

8. $f'(x) = a \cdot \cos(ax)$

Pohdinta C.8

Tässä pohdinnassa jatketaan Esa Liinamaan pohjustamana harmonisen värähtelijän käsittelyä. Tehtävän alkuosassa on esitetty runsaasti selittävää tietoa, joka on tehtävän ratkaisun kannalta irrelevanttia. Jos/kun opiskelijat tajuavat tämän, heille on hyvä tähdentää, että vastaavanlaisia tehtävänantoja saattaa tulla vastaan ylioppilaskirjoituksissa, mihin tämä tehtävä myös osaltaan valmentaa.

Vastaukset

1. $\approx 3,15$ s tai $\approx 7,3$ s
2. (a) Kulmanopeuden kasvaessa jaksonaika lyhenee.
   (b) Maksimi- ja minimikohtia tulee tiheämmin kulmanopeuden kasvaessa. Niitä vastaavat maksimi- ja minimiarvot pysyvät kuitenkin samoina.
3. $\omega > 1$
4. Derivaatan nollakohdissa funktio $x(t)$ saavuttaa paikalliset maksimi- ja minimiarvonsa $x(t) = \pm 1$.
5. Derivaatan nollakohdissa $x'(t) = 0$. Tällöin punnus on paikallaan.
6. (t, x) -koordinaatiston derivaatta $x'(t)$ kuvaa punnuksen nopeutta.
7. Punnus liikkuu nopeiten derivaattafunktion $x'(t)$ paikallisissa minimi- ja maksimikohdissa.

E Tehtävien vastaukset

1

Huom: Käsiteltävä väli: $0 < x < 2\pi$

i) ei koskaan

ii) joskus: kun $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ ja kun $\frac{5}{8}\pi < x < 2\pi$

iii) aina

iv) joskus: kun $\pi \leq x < 2\pi$

v) joskus: kun $x = \frac{1}{2}\pi$ ja kun $x = \frac{3}{2}\pi$

vi) joskus: kun $x = \frac{1}{8}\pi$ ja kun $x = \frac{5}{8}\pi$

2

a) Matti voittaa suklaapatukan, sillä hänen väitteensä pitää paikkansa, mutta Siirin väite ei.

b) Muutetaan Siirin väite kahdella tavalla oikeaksi:

   i) Kun funktiota $\sin(x)$ derivoidaan **kaksi** kertaa, saadaan tulokseksi funktion $\cos(x)$ derivaatta.

   ii) Kun funktiota $\sin(x)$ derivoidaan neljä kertaa, saadaan tulokseksi funktion $\boldsymbol{-\cos(x)}$ derivaatta.

3

Pinta-ala $(A) = 12,5$.

4

Maapallon pinta ei todellisuudessa ole suora. Väite kuitenkin pitää paikkansa, sillä maapallon pinnalla seisova henkilö kokee sekä maan pinnan (vrt. funktio) että maan pinnan seisomiskohdan tangentin (vrt. funktion kuvaajan pisteeseen piirretty tangentti) suoraksi, koska kokonaisuuteen nähden eletään ”zoomatuissa” olosuhteissa. Samoin kun zoomataan funktiota tarpeeksi paljon, vaikuttaa siltä, että funktio ja sen tarkasteltavaan kohtaan piirretty tangentti ovat paikallisesti samansuuntaisia.

5

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}[\cos(x)] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cos(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\frac{sin(h)}{h}\right] \\
&= \cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot 1 \\
&= 0 - \sin(x) \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}
$$

6

a) GeoGebralla saadaan havaittua, että tangentti on vaakasuora, kun $x \approx 1.17$. Tällöin $f'(x) = 0$.

b) $f'(x) = 2$, kun $x = \frac{3}{2}$.

c) $f'(5) = 23$.

7

a) esim. $f(x) = 5x$

b) esim. $f(x) = -x$ ja $g(x) = 6x$

c) esim. $f(x) = -2x$ ja $g(x) = 2x + 5$

d) esim. $f(x) = -7$

e) esim. $f(x) = 10$

8

a) $f'(1) = -4$

b) $f'(2) = 6$

9

Matin funktio ei ole monotoninen, koska $f(2) = 1$, $f(7) = 6$ ja $f(8) = 5$. Monotonisuuden määritelmä ei siten toteudu.
Tepon funktio voi olla joko monotoninen tai sitten ei. Tekstin perusteella ei voida tietää.

10

a) Pitää paikkansa.

b) Pitää paikkansa.

c) Ei pidä paikkansa. Aidosti kasvava funktio voi saada negatiivia arvoja, kunhan määritelmä B.6 toteutuu.

d) Pitää paikkansa.

e) Ei pidä paikkansa. Esimerkiksi funktio $f(x) = 5$ on kasvava, mutta ei aidosti kasvava.

11

a) Funktio on kasvava, kun $-3 \leq x \leq -1$ ja $x \leq 3$.

b) Funktio on vähenevä, kun $-4 \leq x \leq -3$ ja $-1 \leq x \leq 3$.

i) Paikalliset ääriarvokohdat ja niiden tyypit:

- Paikallinen maksimi: $x \approx -1$
- Paikalliset minimit: $x \approx -3$ ja $x \approx 3$.

ii) Paikallisiin ääriarvokohtiin liittyvät ääriarvot:

- $x \approx -1 : 3$
- $x \approx -3 : 1$
- $x \approx 3 : -2$.

(Kasvavien ja vähenevien välien vastauksissa oletetaan edellä mainittujen ääriarvokohtien olevan tarkkoja. Todellisuudessa pelkän kuvan perusteella on vaikea määrittää ääriarvokohtia tarkasti.)

12

a) Väärin

b) Väärin

c) Oikein

13

a) Kyseinen ajatus yksinkertaistaa vieteri+punnus -systeemin ikiliikkujaksi, jossa energiaa ei mene yhtään hukkaan.

b) Vähitellen punnuksen paikalliset maksimi- ja minimiarvot lähestyvät nollaa.

c) Liike-energiaa menee hukkaan (ilmanvastus vastustaa liikettä, energiaa muuttuu lämmöksi ja ääneksi...).

14

a) Hyvä kysymys on sellainen, mihin ei löydy suoraa vastausta materiaalista, vaan joka saa pohtimaan ja soveltamaan opittua.

b) Hyvässä käsitekartassa on vedetty runsaasti linkkejä käsitteistä toisiin, jotta kokonaisuus ja eri käsitteiden väliset yhteydet käyvät hyvin selviksi.